
1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



COURS

DE

GÉOMÉTRIE COTÉE

COURS

DE

GÉOMÉTRIE COTÉE

A L'USAGE DES CANDIDATS A L'ÉCOLE NAVALE

Conforme au nouveau Programme d'admission

PAR

J. NICOL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR AU LYCÉE JANSON-DE-SAILLY

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1900

COURS

DE

GÉOMÉTRIE COTÉE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

BUT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
REPRÉSENTATION DU POINT

1. **But de la géométrie descriptive.** — Imaginons un solide dans l'espace, un tétraèdre ABCD par exemple (*fig.* 1). Choisissons arbitrairement un plan H que nous appellerons *plan horizontal* ou *de comparaison*. Abaissons des sommets du tétraèdre des perpendiculaires sur le plan H qu'elles coupent aux points *a*, *b*, *c*, *d*. Si l'on nous donne sur le plan H les points *a*, *b*, *c*, *d*, puis les nombres qui mesurent les longueurs *a*A, *b*B, *c*C, *d*D, l'unité de longueur étant connue, enfin le sens dans lequel la longueur de la perpendiculaire correspondant à chaque point doit être portée à partir du plan H, nous pourrons reconstituer le tétraèdre dans l'espace.

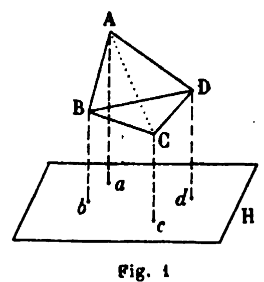


Fig. 1

Supposons qu'une feuille de papier représente le plan horizontal. Sur cette feuille on nous donne les points *a*, *b*, *c*, *d*; à côté de chaque point tel que *a* et parallèlement au bord inférieur de la feuille est inscrit le nombre qui mesure la perpendiculaire *a*A mesurée avec une unité de longueur donnée; enfin ce nombre n'est précédé d'aucun

signe et il est considéré comme positif quand la longueur de la perpendiculaire doit être portée d'un côté déterminé du plan H, il est précédé du signe — et il est considéré comme négatif si la longueur doit être portée en sens contraire. Nous avons sur la feuille tous les éléments nécessaires à la reconstitution de la figure de l'espace.

La géométrie descriptive a pour but de fixer sur un plan les éléments qui permettent de reconstituer une figure de l'espace. Elle fait usage en outre de méthodes qui servent à déterminer par des constructions planes les différents éléments de la figure.

Définitions. — Le point a (*fig.* 1) s'appelle la *projection* du point A sur le plan H. La droite aA est dite *projetante* du point A. Le nombre qui mesure la longueur aA porte le nom de *cote* du point A. La figure plane formée par les projections des points de la figure de l'espace accompagnées des cotes de ces points est une *épure*. La méthode basée sur le mode de représentation que nous venons d'indiquer s'appelle *méthode des projections cotées.*

Remarque. — Les projections obtenues par des perpendiculaires au plan de projection sont dites *orthogonales*. Dans tout ce qui suit, le seul mot de projection doit être entendu dans ce sens.

2. Projections orthogonales sur deux plans rectangulaires. — Au lieu d'inscrire la cote d'un point à côté de la projection de ce point, on peut procéder de la manière suivante.

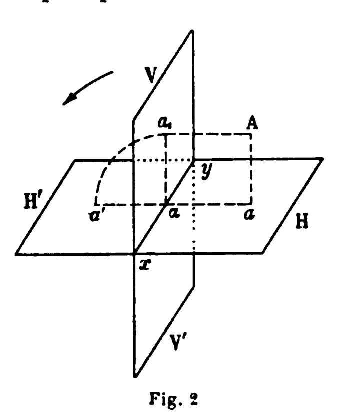


Fig. 2

Choisissons arbitrairement un plan V perpendiculaire au plan horizontal H; nous l'appellerons *plan vertical* (*fig.* 2). Connaissant le plan horizontal, nous nous donnerons le plan vertical par la droite xy suivant laquelle il le coupe. Cette droite s'appelle la *ligne de terre*. Après avoir projeté le point A de l'espace sur le plan horizontal au point a, projetons-le sur le plan vertical au point a_1. Imaginons ensuite un observateur debout sur le plan horizontal, regardant le plan vertical, ayant x à sa gauche et y à sa droite; puis supposons que le plan vertical

tourne autour de la droite xy jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan horizontal, et dans un sens tel que la partie V du plan vertical vienne s'appliquer sur la partie H' du plan horizontal. Le point a_1 viendra occuper la position a'. La figure plane formée par la ligne de terre et les deux points a et a' est encore une *épure* qui permet de reconstituer la position du point A dans l'espace.

La première partie de ce cours aura pour objet d'étudier succinctement les propriétés fondamentales du système des projections sur deux plans rectangulaires.

Dans la seconde partie, nous ferons une étude de la méthode des projections cotées.

Une troisième partie sera consacrée à la représentation des polyèdres et des surfaces simples et à quelques applications qui s'y rapportent.

PREMIÈRE PARTIE

PROJECTIONS SUR DEUX PLANS RECTANGULAIRES

CHAPITRE I

REPRÉSENTATION DU POINT ET DE LA LIGNE DROITE

I. — Point.

3. **Représentation du point.** — Nous avons montré (2) comment à la considération d'un point A de l'espace correspond une épure formée de la ligne de terre xy et de deux points a et a'. Le point a s'appelle la *projection horizontale* du point A et le point a' sa *projection verticale*. D'une manière générale, nous représenterons un point de l'espace par une lettre majuscule A, sa projection horizontale par la lettre minuscule a, et sa projection verticale par la même lettre accentuée a'. Nous désignerons indifféremment le point de l'espace par A ou par (a, a').

Théorème fondamental. — *Dans une épure, les deux projections d'un point sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre;* et réciproquement : *deux points qui sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre peuvent être considérés comme les deux projections d'un point de l'espace.*

En effet, les deux droites Aa, Aa_1 (*fig.* 2) déterminent un plan perpendiculaire à la droite xy, puisque cette droite, située à la fois dans les plans H et V, est perpendiculaire à la droite Aa et à la droite Aa_1. Soit α le point où ce plan coupe la ligne de terre xy; traçons les droites αa, αa_1; elles sont perpendiculaires à la droite xy.

Pendant le mouvement du plan V la droite αa_1 reste perpendiculaire à la droite xy; elle vient donc s'appliquer sur la perpendiculaire à la droite xy au point α située dans le plan H. Le point a' est donc sur cette perpendiculaire à la droite xy, et les deux points a et a' sont bien sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Réciproquement, soient a, a' (*fig.* 2) deux points situés sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre au point α. Quand on suppose le plan vertical ramené à sa position première, le point a' occupe la position a_1 et la droite αa_1 est perpendiculaire à la ligne de terre; comme il en est de même de la droite αa, la droite xy est perpendiculaire au plan $a\alpha a_1$ qui est par suite perpendiculaire aux plans H et V. Les deux perpendiculaires aux plans H et V menées par les points a et a_1 sont donc dans le plan $a\alpha a_1$; or, étant perpendiculaires à deux plans qui se coupent, elles ne sont pas parallèles, donc elles se coupent en un point A dont les deux projections sont bien, dans l'épure, les points a et a'.

4. Définitions. — La partie xyH du plan horizontal (*fig.* 2) s'appelle la *partie antérieure* de ce plan : c'est celle sur laquelle est supposé l'observateur (2); la partie xyH' s'appelle la *partie postérieure* du plan horizontal. La partie xyV du plan vertical, qui est dans la même région que l'observateur par rapport au plan horizontal, s'appelle la *partie supérieure* du plan vertical; la partie xyV' s'appelle la *partie inférieure* du plan vertical.

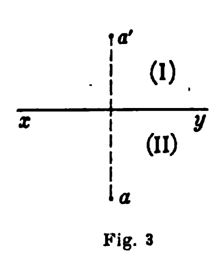


Fig. 3

L'épure d'un point se compose de la ligne de terre xy et des deux projections a, a', du point qui sont sur une même perpendiculaire à cette droite (*fig.* 3). Toute perpendiculaire à la ligne de terre se nomme une *ligne de rappel*.

La cote du point A est aA (*fig.* 2). Elle est égale à αa_1 et par suite à $\alpha a'$. La distance du point A au plan vertical, qu'on appelle *éloignement* du point A, est a_1A; elle est égale à αa. On a donc sur l'épure (*fig.* 3) la cote et l'éloignement du point A; ils sont donnés par la règle suivante :

La cote d'un point est égale à la distance de la projection verticale de ce point à la ligne de terre. Son éloignement est égal à la distance de sa projection horizontale à la ligne de terre.

5. Situation d'un point dans l'espace. — Les deux plans de projection partagent l'espace en quatre régions. Les points qui sont, par rapport au plan horizontal, dans la même région que la partie supérieure du plan vertical sont dits *au-dessus* du plan horizontal; ceux qui sont dans la région opposée sontdits *au-dessous* de ce plan. Les points qui sont, par rapport au plan vertical, dans la même région que la partie antérieure du plan horizontal sont dits *en avant* du plan vertical; ceux qui sont dans la région opposée sont dits *en arrière* de ce plan.

Les points de l'espace sont au-dessus ou au-dessous du plan horizontal suivant que, dans l'épure, leur projection verticale est, par rapport à la ligne de terre, dans la région (I) ou dans la région (II) (*fig.* 3), les lettres x et y étant disposées comme nous l'avons indiqué plus haut (2) eu égard au sens de la rotation du plan vertical; ils sont en avant ou en arrière du plan vertical suivant que leur projection horizontale est dans la région (II) ou dans la région (I). Il en résulte que l'examen de l'épure d'un point permet de reconnaître dans quelle région est situé le point de l'espace par rapport aux deux plans de projection.

Par exemple, le point A de l'espace qui a pour projections les deux points a et a' (*fig.* 3) est au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical.

La comparaison de la cote $\alpha a'$ et de l'éloignement αa nous permet en outre de reconnaître que le point est plus rapproché du plan horizontal que du plan vertical.

II. — Ligne droite.

6. Représentation de la ligne droite. — On appelle *projection d'une ligne* l'ensemble des projections de tous les points de la ligne. La représentation de la ligne droite repose sur le théorème suivant:

Théorème. — *La projection d'une ligne droite est en général une ligne droite.*

En effet, soient AB une ligne droite et H le plan de projection (*fig.* 4). Projetons le point A en a; le plan aAB est perpendiculaire au plan H qu'il coupe suivant une droite ab. Toute perpendiculaire menée par un point quelconque B de la droite AB au plan H est dans le plan aAB et par conséquent coupe le plan H en un point b de

la droite ab. Le plan aAB s'appelle le *plan projetant* la droite AB.

Si la droite AB est perpendiculaire au plan H sa projection n'est plus une ligne droite, elle se réduit à un point.

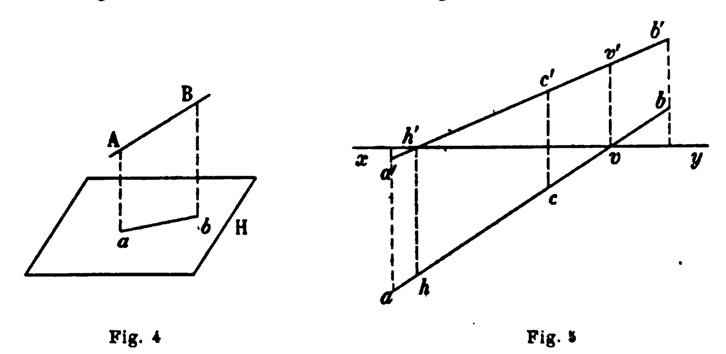


Fig. 4 Fig. 5

Une ligne droite est définie par deux de ses points A, B. Supposons données sur l'épure les projections (a, a'), (b, b'), de ces deux points (*fig.* 5). D'après le théorème précédent, la projection horizontale de la droite sera la droite ab, et sa projection verticale sera la droite $a'b'$.

Inversement, deux droites ab, $a'b'$, tracées sur l'épure, peuvent être considérées comme les deux projections d'une droite de l'espace qui est l'intersection du plan passant par la droite ab, et perpendiculaire au plan horizontal, avec le plan perpendiculaire au plan vertical mené par la droite suivant laquelle vient se placer la droite $a'b'$ quand on suppose qu'on a ramené le plan vertical à sa position primitive (*fig.* 2).

Les deux plans dont nous venons de parler étant perpendiculaires à deux plans qui se coupent ne peuvent être parallèles ; mais ils peuvent être confondus et alors la droite de l'espace n'est plus déterminée par ses deux projections. Si les deux plans sont confondus en un plan unique, ce plan étant perpendiculaire à la fois au plan horizontal et au plan vertical, sera perpendiculaire à leur intersection, c'est-à-dire à la ligne de terre. Dans ce cas les deux projections de la droite, qui sont précisément les droites suivant lesquelles le plan considéré coupe le plan horizontal et le plan vertical, sont perpendiculaires à la ligne de terre au même point ; par conséquent, dans l'épure, elles sont confondues.

Un plan perpendiculaire à la ligne de terre s'appelle un *plan de profil* ; donc :

Toute droite située dans un plan de profil a ses deux projections perpendiculaires en un même point de la ligne de terre.

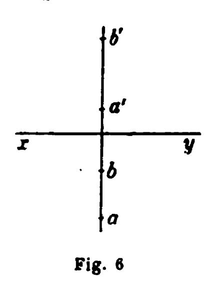


Fig. 6

Pour déterminer une telle droite, il faut se donner les projections de deux de ses points, par exemple (a, a'), (b, b'), (*fig.* 6).

Remarque. — Deux droites perpendiculaires, sur l'épure, à la ligne de terre en deux points différents ne peuvent être les projections d'une même droite de l'espace, car les plans perpendiculaires aux deux plans de projection menés par ses deux droites sont deux plans de profil parallèles.

7. Détermination d'un point de la droite. — Traces. — On obtient un point quelconque (c, c') de la droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 5) en se donnant l'une de ses projections, la projection horizontale c par exemple, et traçant la ligne de rappel qui passe par le point c ; elle coupe la projection verticale $a'b'$ de la droite au point c', qui est la projection verticale du point de la droite projeté horizontalement au point c.

On appelle *traces* de la droite les points où elle coupe les deux plans de projection.

La *trace horizontale* de la droite ayant une cote nulle se projette verticalement sur la ligne de terre (4) ; comme sa projection verticale doit être sur $a'b'$, c'est le point h' qui se projette horizontalement au point h.

La *trace verticale* de la droite ayant un éloignement nul se projette horizontalement sur la ligne de terre au point v où elle est coupée par la droite ab. Sa projection verticale est le point v'.

8. Droites occupant une position particulière par rapport aux plans de projection. — Une droite parallèle au plan horizontal s'appelle une *horizontale*. Elle a sa projection verticale parallèle à la ligne de terre, car tous ses points ont même cote (4). Sa trace verticale est le point (a,a') (*fig.* 7) ; elle n'a pas de trace horizontale.

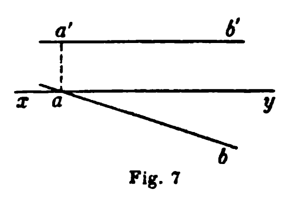


Fig. 7

Une parallèle au plan vertical s'appelle une *ligne de front*. Tous ses points ayant même éloignement, sa projection horizontale est paral-

lèle à la ligne de terre (*fig.* 8). Sa trace horizontale est le point (a, a') ; elle n'a pas de trace verticale.

Une droite parallèle à la ligne de terre a ses deux projections parallèles à la ligne de terre (*fig.* 9).

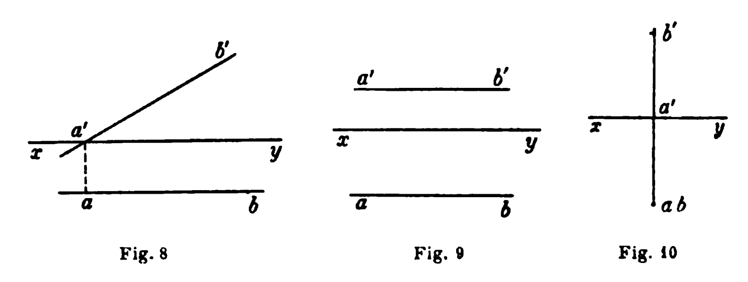


Fig. 8 Fig. 9 Fig. 10

Une droite perpendiculaire au plan horizontal s'appelle une *verticale*. Elle se projette horizontalement suivant un point et verticalement suivant une perpendiculaire à la ligne de terre passant par ce point (*fig.* 10).

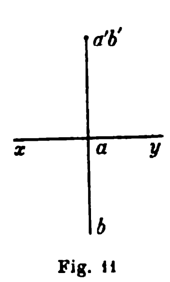


Fig. 11

Une droite perpendiculaire au plan vertical s'appelle une *ligne de bout*. Sa projection verticale est un point et sa projection horizontale est la perpendiculaire à la ligne de terre passant par ce point (*fig.* 11).

9. Droites parallèles. — Théorème. — *Deux droites parallèles ont leurs projections, sur un même plan, parallèles. — Si deux droites ont leurs projections horizontales parallèles ainsi que leurs projections verticales elles sont parallèles, à moins qu'elles ne soient dans des plans de profil, auquel cas elles peuvent ne pas être parallèles.*

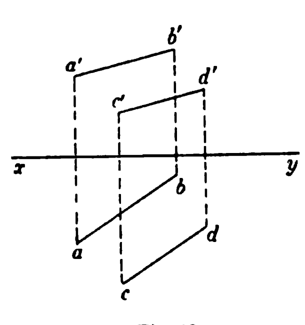


Fig. 12

En effet, les plans projetant deux droites parallèles sont parallèles comme contenant deux couples de directions parallèles : la direction des deux droites données et la direction perpendiculaire au plan de projection; les projections des deux

droites sont donc parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième.

Réciproquement, soient les deux droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$, qui ont leurs projections de même nom parallèles (*fig.* 12). Si par un point (c, c') de la droite $(cd, c'd')$ nous menons une parallèle à la droite $(ab, a'b')$, elle doit avoir sa projection horizontale parallèle à la droite ab et sa projection verticale parallèle à la droite $a'b'$. C'est donc la droite $(cd, c'd')$, qui par conséquent est parallèle à la droite $(ab, a'b')$.

Les parallèles aux droites ab, $a'b'$, menées par les points c et c', ne suffisent pas à déterminer une droite de l'espace si la droite $(ab, a'b')$ est dans un plan de profil; elles sont alors confondues en une seule droite perpendiculaire à la ligne de terre en un point, et sont les projections de toute droite située dans le plan de profil qui coupe la ligne de terre en ce point.

Deux droites situées dans deux plans de profil ont leurs projections parallèles et peuvent cependant ne pas l'être; pour reconnaitre si elles le sont, on peut avoir recours à une méthode que nous allons indiquer et qui est d'un emploi continuel en géométrie descriptive.

10. Changement de plan vertical. — La difficulté que nous venons de rencontrer à la fin du paragraphe précédent tient à la situation particulière des plans de profil par rapport aux deux plans de projection; or, rien ne nous empêche de faire choix d'un plan vertical différent du premier et de construire les projections verticales des deux droites dans le nouveau système : nous rentrerons dans le cas général et les deux droites de l'espace seront parallèles ou non suivant que leurs nouvelles projections verticales le seront ou ne le seront pas. L'opération que nous venons d'indiquer porte le nom de *changement de plan vertical.* Elle repose sur la solution du problème suivant.

Problème. — *Connaissant les deux projections d'un point* (a, a') *dans un système donné, construire la nouvelle projection verticale du point en supposant qu'on fasse choix d'un plan vertical déterminé par son intersection avec le plan horizontal qui est la nouvelle ligne de terre* x_1y_1 (*fig.* 13).

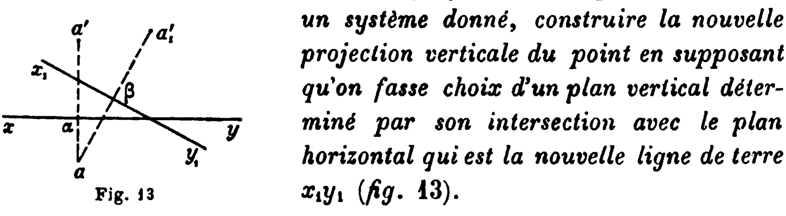


Fig. 13

Soit xy la ligne de terre primitive. Puisqu'on ne change pas le plan

horizontal, la cote du point reste la même, la nouvelle projection verticale de ce point est donc sur la perpendiculaire menée par le point a à la droite x_1y_1 et à une distance $\beta a'_1$ de cette droite égale à la distance $\alpha a'$ du point a' à la droite xy (4). En outre la position du point a' par rapport à la droite xy indique la situation du point de l'espace par rapport au plan horizontal; on en déduit la position du point a'_1 par rapport à la ligne de terre x_1y_1 (5).

Pour effectuer le changement de plan vertical pour une droite il suffira de l'effectuer pour deux points de la droite.

Remarque. — On pourrait d'une manière analogue effectuer un changement de plan horizontal en conservant le plan vertical.

Applications.

11. — **I.** *Reconnaître si deux droites données dans deux plans de profil sont parallèles.* — Soient les deux droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ (*fig.* 14). Prenons le plan de profil x_1y_1 comme nouveau plan vertical. Construisons les nouvelles projections verticales a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 des quatre points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'). Pour que les deux droites considérées soient parallèles, il faut que les deux droites $a'_1b'_1$, $c'_1d'_1$ soient parallèles.

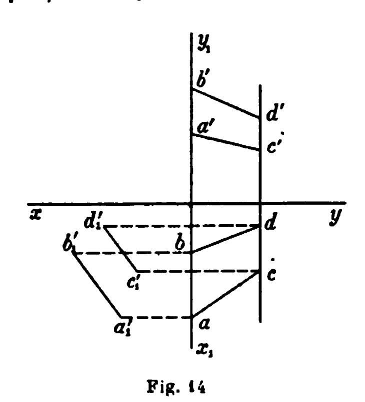


Fig. 14

Remarque I. — Si les deux droites $a'c'$, $b'd'$ étaient parallèles, les deux longueurs $a'b'$, $c'd'$ seraient égales. Or les longueurs $a'_1b'_1$, $c'_1d'_1$ se projettent sur la droite xy suivant des longueurs égales à $a'b'$ et $c'd'$; elles sont donc égales. Leurs projections ab, cd sur deux droites parallèles sont aussi égales et les deux droites ac, bd sont parallèles.

On peut utiliser cette remarque pour mener par le point (c, c'), par exemple, une parallèle à la droite $(ab, a'b')$ d'un plan de profil. On trace les droites ac, $a'c'$, on mène bd parallèle à ac et $b'd'$ parallèle à $a'c'$. Le point (d, d') détermine avec le point (c, c') la parallèle cherchée.

Remarque II. — Nous avons choisi comme nouveau plan vertical l'un des plans de profil de préférence à un plan vertical quelconque parce que nous connaissons ainsi immédiatement la direction des nouvelles lignes de rappel qui sont parallèles à la droite xy, tandis qu'avec un autre plan vertical il y aurait eu d'abord à déterminer la direction des perpendiculaires à la nouvelle ligne de terre.

On peut opérer comme nous venons de le faire pour tous les problèmes relatifs aux plans de profil.

12. — **II.** *Construire la distance de deux points donnés par leurs projections. — Trouver l'angle d'une droite avec le plan horizontal.* — Soient les deux points (a, a'), (b, b') (*fig.* 15). Si les deux points étaient dans le plan vertical de projection, leur distance serait égale à la distance de leurs projections verticales. Nous serons ramenés à ce cas en effectuant un changement de plan vertical en prenant pour nouveau plan vertical le plan projetant horizontalement la droite $(ab, a'b')$. Nous pouvons encore simplifier la construction en supposant qu'en même temps qu'on change le plan vertical, on prenne pour plan horizontal le plan parallèle au plan horizontal mené par le point (a, a'); cela revient simplement à diminuer les cotes de tous les points de la longueur $\alpha a'$. Dans ces conditions la nouvelle ligne de terre x_1y_1 est la droite ab, la nouvelle projection verticale du point (a, a') est le point a lui-même, et la nouvelle projection verticale du point (b, b') est le point b'_1 situé sur la perpendiculaire à la droite ab menée par le point b à une distance de la droite ab égale à la différence $\beta b'$ des cotes des points (a, a'), (b, b'). La distance cherchée est la longueur de la droite ab'_1. On a donc la règle suivante, dont il est aisé d'ailleurs de se rendre compte directement :

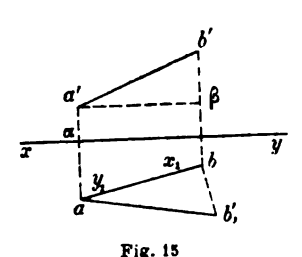


Fig. 15

La distance de deux points de l'espace est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la distance de leurs projections horizontales d'une part, et la différence de leurs cotes de l'autre.

L'angle de la droite $(ab, a'b')$ avec le plan horizontal est égal à l'angle de cette droite avec sa projection horizontale ; comme dans le

nouveau système, la droite est dans le plan vertical, cet angle est égal à l'angle b_1ab.

On trouverait d'une manière analogue l'angle de la droite avec le plan vertical.

13. — III. *Mener par un point une droite parallèle à une droite donnée.*

Par les deux projections du point on mènera des parallèles aux deux projections de la droite donnée, ce seront les projections de la droite demandée (9).

Nous avons traité plus haut (11. Remarque I) le cas où la droite donnée est dans un plan de profil.

14. Intersection de deux droites. — Si deux droites se coupent, les projections du point d'intersection doivent être à la fois sur les deux projections de même nom des deux droites.

Par conséquent, pour reconnaître si deux droites se coupent, il suffit de vérifier si les points d'intersection de leurs projections de même nom sont sur une même ligne de rappel. S'il en est ainsi, on a en même temps les deux projections du point d'intersection.

15. Points hors des limites de l'épure. — Supposons qu'on se propose de reconnaître si deux droites données par leurs projections sont dans le même plan. Il est aisé d'abord de voir si elles sont parallèles (9). S'il n'en est pas ainsi, nous venons d'établir comment on peut vérifier si elles se coupent (14) ; mais, si les points d'intersection des projections de même nom ne sont pas dans les limites de l'épure, le procédé ne réussit plus.

Il peut arriver en effet que certaines constructions à effectuer dans une épure aient quelques-uns de leurs éléments hors des limites du dessin. Une méthode très naturelle consiste dans ce cas à réduire la figure dans une proportion qui permette d'effectuer ces constructions sur la feuille ; c'est-à-dire que l'on construit une figure homothétique de la figure donnée, le centre et le rapport d'homothétie étant choisis de sorte que la construction réussisse.

Supposons par exemple qu'on donne les deux droites $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ (*fig.* 16), dont les projections de même nom ne se coupent

pas dans les limites de l'épure et qu'on se propose de reconnaitre si elles sont dans le même plan.

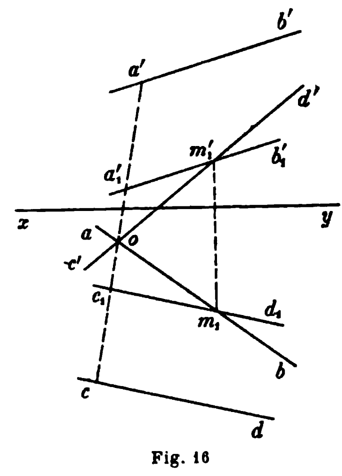


Fig. 16

On sait qu'à une droite correspond dans l'homothétie une droite parallèle et que si une droite passe par le centre d'homothétie elle est elle-même son homologue.

Pour simplifier un peu les constructions, prenons comme centre d'homothétie un point de la figure donnée, par exemple le point d'intersection o des droites ab et $c'd'$. Prenons le rapport d'homothétie égal à $\frac{1}{3}$. Les droites ab et $c'd'$ qui passent par le centre d'homothétie se transforment en elles-mêmes. Pour construire les droites homologues des droites cd et $a'b'$, nous mènerons par le point o une droite quelconque ca'. Nous prendrons les longueurs oc_1 et oa_1 égales aux tiers des longueurs oc et oa'. Par le point c_1 nous mènerons une droite c_1d_1 parallèle à la droite cd et par le point a'_1 une droite $a'_1b'_1$ parallèle à la droite $a'b'$. Les droites c_1d_1 et $a'_1b'_1$ sont les homologues des droites cd et $a'b'$; d'ailleurs la direction des lignes de rappel n'est pas changée puisque la ligne de terre a pour homologue une droite parallèle à elle-même. Il suffira donc de déterminer les points d'intersection m_1 et m'_1 de ab et c_1d_1 d'une part, et de $c'd'$ et $a'_1b'_1$ de l'autre ; s'ils sont sur une même ligne de rappel, les deux droites proposées sont dans le même plan ; elles n'y sont pas dans le cas contraire.

EXERCICES

1. — Construire les traces d'une droite située dans un plan de profil et déterminée par les projections de deux de ses points.

2. — On donne un point par ses deux projections, une droite par ses deux projections, et une verticale. Construire les projections d'une droite passant par le point et rencontrant la droite donnée et la verticale.

3. — On donne deux droites par leurs projections et une verticale. Construire les projections d'une droite parallèle à la première et rencontrant la seconde et la verticale.

4. — Construire le lieu géométrique des traces horizontales des droites qui passent par un point donné d'une verticale donnée et qui font un angle donné avec le plan horizontal.

5. — Porter, sur une droite donnée, à partir d'un point donné de cette droite, et dans un sens déterminé, une longueur donnée.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DU PLAN. INTERSECTION DE DEUX PLANS INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

I. — Représentation du plan.

16. On peut toujours supposer un plan défini par deux droites qui se coupent. En effet, s'il est défini par trois points non en ligne droite, il suffira de joindre deux de ces points au troisième par deux lignes droites pour rentrer dans le cas précédent ; s'il est défini par une droite et un point hors de la droite, on joindra le point à un point quelconque de la droite ; enfin s'il est défini par deux droites parallèles, en joignant un point de l'une des deux droites à un point de l'autre on obtiendra une droite qui, associée à l'une des deux parallèles, formera un ensemble de deux droites qui se coupent déterminant le plan. Une surface étant déterminée, il faut savoir construire une projection d'un point de la surface connaissant l'autre projection de ce point. C'est le problème que nous allons d'abord résoudre pour le plan.

Problème. — *Connaissant une projection d'un point d'un plan déterminé par deux droites, trouver l'autre projection de ce point.*

Supposons le plan déterminé par les deux droites (oa, $o'a'$), (ob, $o'b'$) (*fig.* 17), et soit m la projection horizontale donnée d'un point du plan. Imaginons une droite CD tracée dans le plan et passant par le point cherché M. Sa projection horizontale cd passera par le point m ; choisissons-la arbitrairement et cherchons à construire sa projection verticale. La droite CD rencontre dans l'espace la droite OA en

un point qui se projette horizontalement au point d'intersection c des droites cd et oa ; puisque ce point est sur la droite OA, sa projection verticale c' est au point d'intersection de la droite $o'a'$ avec la ligne de rappel du point c. On voit de même que le point d'intersection D de la droite CD et de la droite OB se projette verticalement au point d'intersection d' de la droite $c'd'$ avec la ligne de rappel du point d'intersection d des droites cd et ob. La projection verticale de la droite CD est donc la droite $c'd'$; comme le point M est sur la droite CD, sa projection verticale est le point d'intersection m' de la droite $c'd'$ avec la ligne de rappel du point m.

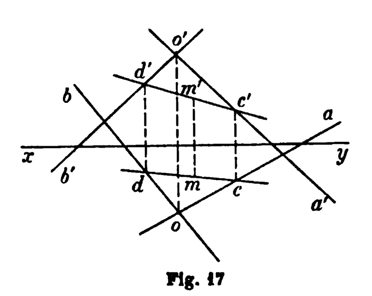


Fig. 17

Remarque. — Quand un plan est déterminé par deux droites et qu'une construction sort des limites de l'épure par suite de la situation de l'une de ces deux droites, on peut toujours remplacer cette droite par une autre droite joignant deux points du plan arbitrairement choisis, mais situés de telle façon que la construction puisse s'effectuer sur la feuille du dessin.

17. Horizontales et frontales d'un plan. — Traces du plan. — Il importe de savoir déterminer les horizontales et les lignes de front situées dans un plan donné; ce sont des lignes qui jouent un grand rôle dans les constructions de la géométrie descriptive. Les horizontales d'un plan sont les droites d'intersection de ce plan et des plans parallèles au plan horizontal; elles sont par suite parallèles comme intersections d'un plan et d'une série de plans parallèles. Il en résulte que leurs projections de même nom sont parallèles (9). La même remarque s'applique aux lignes de front du plan qui sont les intersections de ce plan et d'une série de plans parallèles au plan vertical. On les appelle les *frontales* du plan.

Soit un plan déterminé par deux droites qui se coupent (oa, $o'a'$), (ob, $o'b'$) (*fig.* 18). La projection verticale d'une horizontale est parallèle à la ligne de terre (8); donc, pour construire une horizontale du plan, nous nous donnerons arbitrairement sa projection verticale $c'd'$

parallèle à la ligne de terre et nous déterminerons sa projection horizontale *cd* de telle sorte que la droite (*cd*, *c'd'*) soit dans le plan donné (16). La droite *cd* sera la direction des projections horizontales de toutes les horizontales du plan.

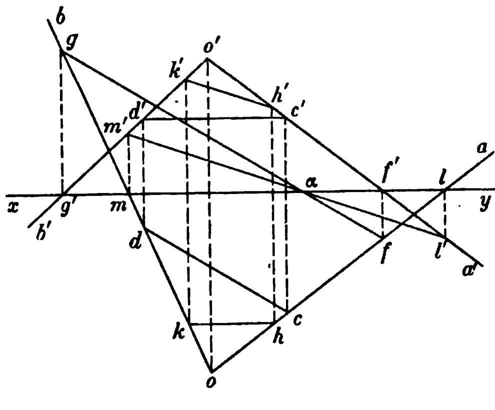


Fig. 18

On déterminera d'une manière analogue une frontale quelconque (*hk*, *h'k'*) du plan.

On appelle *trace* d'un plan sur un plan quelconque l'intersection des deux plans ; en particulier on appelle *trace horizontale* d'un plan son intersection avec le plan horizontal de projection, et *trace verticale* du plan son intersection avec le plan vertical.

Pour déterminer la trace horizontale du plan défini par les deux droites (*oa*, *o'a'*), (*ob*, *o'b'*) (*fig.* 18), il suffit de remarquer que c'est l'horizontale dont la cote est nulle. Sa projection verticale est donc la ligne de terre, et sa projection horizontale la droite *fg*. De même la trace verticale du plan a pour projection horizontale la ligne de terre et pour projection verticale la droite *l'm'*.

La trace horizontale d'un plan a, comme toute droite de l'espace, deux projections; sa projection verticale est toujours la ligne de terre. On donne plus particulièrement le nom de trace horizontale à sa projection horizontale; cela tient à ce que la droite de l'espace se confond ici avec sa projection horizontale. Une remarque analogue doit être faite pour la trace verticale du plan.

Les deux traces d'un plan doivent se couper sur la ligne de terre, car elles passent toutes deux par le point où la ligne de terre coupe le plan.

On donne souvent un plan par ses traces. Il ne faut jamais perdre de vue qu'un plan donné par ses traces est un plan donné par deux droites qui se coupent, de sorte que les constructions établies dans le cas le plus général s'appliquent tout naturellement au cas où le plan est donné par ses traces.

Quand un plan est donné par ses traces, nous désignerons la trace horizontale par une lettre majuscule, P par exemple, et la trace verticale par la même lettre accentuée P'. La droite P a pour projection verticale la ligne de terre; la droite P' a cette même ligne de terre pour projection horizontale. On ne doit jamais oublier que la droite P' n'est pas la projection verticale de P; il ne saurait d'ailleurs y avoir de confusion dans le système de notation que nous employons puisque nous représentons une droite par deux lettres et que les deux projections d'un même point sont désignées par des lettres minuscules. Nous énoncerons PαP' le plan donné par ses deux traces sur la figure 19.

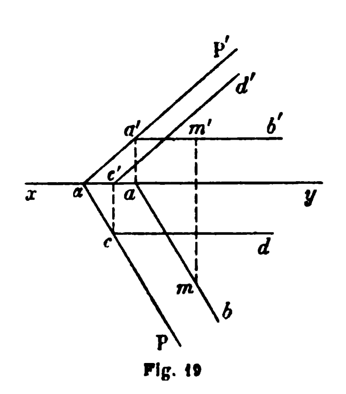


Fig. 19

Nous représentons sur la même figure une horizontale (ab, $a'b'$) et une frontale (cd, $c'd'$) du plan. Quand on veut figurer un point (m, m') du plan, on le prend souvent sur une horizontale ou une frontale qu'on a choisie préalablement d'une manière arbitraire.

Remarque. — Toute droite située dans un plan a ses traces sur les traces de même nom du plan.

18. Lignes de plus grande pente d'un plan. — Angles d'un plan avec les plans de projection. — On appelle *ligne de plus grande pente d'un plan par rapport au plan horizontal* toute perpendiculaire aux horizontales du plan menée dans le plan. Les horizontales d'un plan étant parallèles, les lignes de plus grande pente du plan par rapport au plan horizontal sont aussi parallèles. L'angle du plan avec le plan horizontal est égal à l'angle de l'une de ces lignes de plus grande pente avec le plan horizontal.

Avant d'indiquer la représentation d'une ligne de plus grande pente d'un plan, nous rappellerons d'abord un théorème de géométrie.

Théorème. — *Un angle droit* ABC *dont un côté est parallèle à un plan* P *se projette sur ce plan suivant un angle droit abc* (*fig.* 20). — Réciproquement, *si un angle* ABC, *dont un côté est parallèle au plan* P, *se projette sur ce plan suivant un angle droit, l'angle* ABC *est droit.*

En effet, l'angle ABC étant droit, le côté AB est perpendiculaire au côté BC. La droite AB étant parallèle au plan P est parallèle à sa projection *ab*; donc la droite *ab* est perpendiculaire à la droite BC. Or la droite *ab* est aussi perpendiculaire à la droite B*b* qui est perpendiculaire au plan P; donc la droite *ab* est perpendiculaire au plan BC*bc* qui contient les deux droites BC, B*b*, et par suite à la droite *bc* qui est dans ce plan.

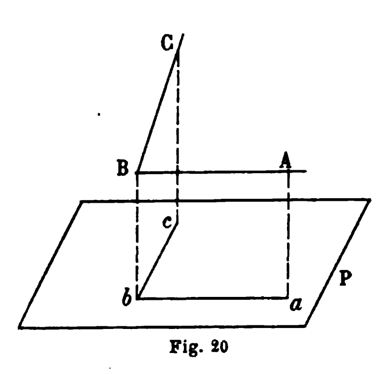


Fig. 20

Réciproquement, supposons que l'angle *abc* soit droit, le côté *ab* est perpendiculaire au côté *bc*; comme il est perpendiculaire à la droite B*b*, il est perpendiculaire au plan BC*bc*; donc la droite AB qui est parallèle à la droite *ab* est perpendiculaire au plan BC*bc*, et par suite à la droite BC qui est dans ce plan.

Proposons-nous de déterminer une ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal d'un plan PαP′ que nous pouvons supposer donné par ses traces (*fig.* 21). La ligne de plus grande pente forme dans l'espace un angle droit avec toute horizontale du plan. Cet angle a un de ses côtés parallèle au plan horizontal, donc, d'après le théorème précédent, il se projette horizontalement suivant un angle droit : par conséquent, la projection horizontale d'une ligne de plus grande pente du plan est perpendiculaire à la direction des projections horizontales des horizontales du plan, et en particulier à sa trace horizontale αP. Donnons-nous donc arbitrairement la projection horizontale *ab* de la ligne de plus grande pente que nous voulons construire, elle doit être perpendiculaire à la droite αP. Nous sommes ramenés au problème qui

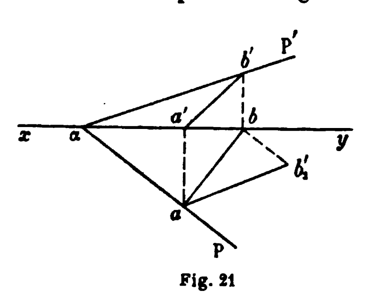


Fig. 21

consiste à déterminer la projection verticale d'une droite d'un plan connaissant sa projection horizontale (16). $a'b'$ est la projection verticale de la droite cherchée.

Nous obtiendrons l'*angle du plan avec le plan horizontal* en déterminant l'angle de la droite (ab, $a'b'$) avec le plan horizontal (12). C'est l'angle bab'_1 ($bb'_1 = bb'$).

La connaissance d'une ligne de plus grande pente d'un plan par rapport au plan horizontal détermine complètement le plan.

Supposons en effet qu'une droite donnée (ab, $a'b'$) soit une ligne de plus grande pente d'un plan par rapport au plan horizontal (*fig.* 21). La trace horizontale du plan doit passer par la trace horizontale a de la droite et être perpendiculaire à la droite ab, c'est donc la droite αP. La trace verticale doit passer par le point α où la droite αP coupe la ligne de terre et par la trace verticale b' de la droite ; c'est donc la droite αP', et l'on voit que les deux traces du plan sont déterminées ; le plan est donc lui-même complètement défini par la connaissance d'une ligne de plus grande pente.

On appelle *ligne de plus grande pente* d'un plan *par rapport au plan vertical* toute perpendiculaire menée dans le plan aux frontales du plan.

On établira sans difficulté pour ces lignes de plus grande pente une théorie absolument analogue à celle que nous venons d'exposer pour les lignes de plus grande pente par rapport au plan horizontal. On en déduira l'angle du plan avec le plan vertical.

19. Plans occupant une position particulière par rapport aux plans de projection. — On appelle *plan vertical* tout plan perpendiculaire au plan horizontal. Un plan vertical est complètement déterminé par sa trace horizontale αP (*fig.* 22). Sa trace verticale αP' est perpendiculaire à la ligne de terre, car elle est perpendiculaire au plan horizontal comme intersection de deux plans perpendiculaires à ce plan. Tout point (a, a') du plan se projette horizontalement sur sa trace horizontale. Le plan horizontal étant perpendiculaire à l'intersection αP' du plan vertical et du plan considéré,

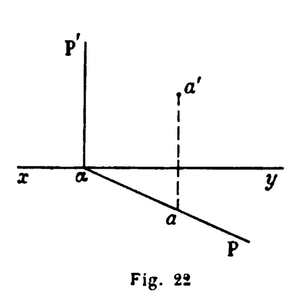


Fig. 22

l'angle $P\alpha y$ est égal à l'angle du plan $P\alpha P'$ avec le plan vertical.

On appelle ***plan de bout*** tout plan perpendiculaire au plan vertical. Sa trace horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre. Un point (a, a') de ce plan se projette verticalement sur sa trace verticale (*fig.* 23).

L'angle $P'\alpha y$ est égal à l'angle du plan avec le plan horizontal.

Un *plan de front* est un plan parallèle au plan vertical. Sa trace horizontale F est parallèle à la ligne de terre. Il n'a pas de trace verticale. Le point (a, a') est un point quelconque de ce plan (*fig.* 24).

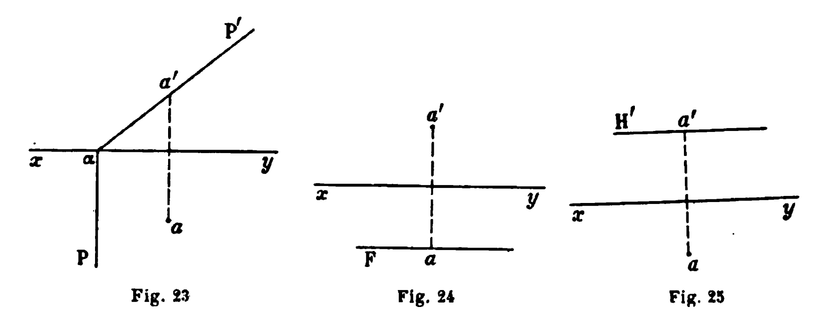


Fig. 23 Fig. 24 Fig. 25

Un *plan horizontal* est un plan parallèle au plan horizontal. Sa trace verticale H' est parallèle à la ligne de terre. Il n'a pas de trace horizontale. Le point (a, a') est un point de ce plan (*fig.* 25).

Un *plan de profil* (6) a ses deux traces confondues suivant une perpendiculaire à la ligne de terre (*fig.* 26) ; tout point (a, a') du plan a ses deux projections sur cette droite.

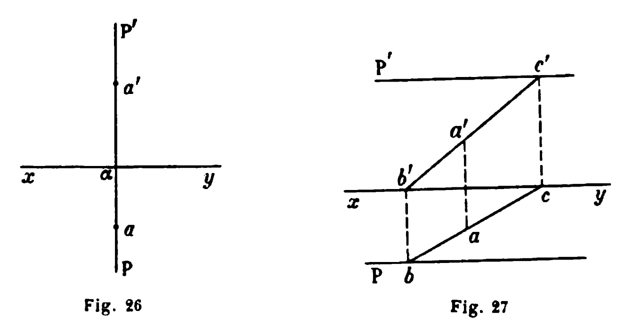


Fig. 26 Fig. 27

Un *plan parallèle à la ligne de terre* a ses deux traces parallèles à la ligne de terre. Proposons-nous, étant donné un plan parallèle à la ligne de terre par ses deux traces P, P' (*fig.* 27), de déterminer la

projection verticale d'un point de ce plan donné par sa projection horizontale a. Nous appliquerons la méthode indiquée plus haut (16) aux deux droites P et P' en choisissant arbitrairement la projection horizontale bc d'une droite du plan passant par le point. Nous obtenons ainsi la projection verticale a' demandée.

20. Changement de plan vertical pour un plan. — Pour effectuer le changement d'un plan de projection relativement à un plan donné, il suffit d'effectuer le changement de plan pour trois points du plan, ou pour une droite et un point, ou pour deux droites (10).

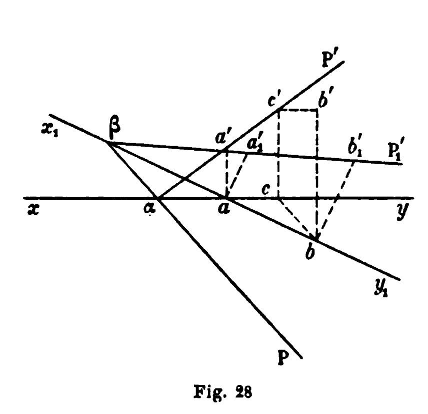


Fig. 28

Supposons qu'étant donné un plan PαP' par ses traces, on prenne pour nouveau plan vertical de projection le plan vertical x_1y_1 (*fig.* 28), le plan horizontal restant le même, et qu'on veuille *déterminer la trace verticale du plan dans le nouveau système.* D'abord la trace horizontale ne change pas, et le point β où elle coupe la nouvelle ligne de terre x_1y_1 est un point de la nouvelle trace verticale. Pour avoir un autre point de la nouvelle trace verticale on détermine un point (b, b') du plan dont la projection horizontale soit sur la droite x_1y_1 (nous nous sommes servis de l'horizontale $(bc, b'c')$ pour le déterminer), puis on effectue le changement de plan pour ce point. Sa nouvelle projection verticale b'_1 est un point de la nouvelle trace verticale $\beta P'_1$ du plan.

Remarque. — Quand le point de rencontre des deux lignes de terre est sur l'épure, il y a avantage, comme le montre la figure, à faire le changement de plan pour le point (a, a') qui se projette horizontalement en ce point ; il appartient à la fois aux deux traces verticales.

21. Plans parallèles. — Théorème. — *Deux plans parallèles ont leurs traces de même nom parallèles ;* et réciproquement, *deux plans qui ont leurs traces de même nom parallèles sont parallèles.*

En effet, si deux plans sont parallèles, leurs traces de même nom sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles par un troisième. Si, inversement, les traces de même nom de deux plans sont parallèles, ils sont parallèles comme contenant deux couples de droites parallèles.

Application. — *Par un point donné mener un plan parallèle à un plan donné.*

Soient (a, a') le point donné et $P\alpha P'$ le plan supposé déterminé par ses traces (*fig.* 29). D'une manière générale, il suffit de mener par le point des parallèles à deux droites non parallèles du plan. Dans le cas actuel on mènera par le point (a, a') des parallèles aux deux traces du plan $P\alpha P'$; on obtiendra ainsi une horizontale et une frontale du plan cherché. Supposons l'horizontale $(ab, a'b')$ construite (sa projection horizontale est parallèle à la droite αP). Pour en déduire les traces du plan demandé, il suffira, par la trace verticale b' de l'horizontale, de mener une parallèle à la trace verticale $\alpha P'$ du plan donné; d'après le théorème précédent, cette parallèle $\beta Q'$ sera la trace verticale du plan cherché. Sa trace horizontale sera la parallèle βQ à la droite αP menée par le point β où la trace verticale $\beta Q'$ rencontre la ligne de terre.

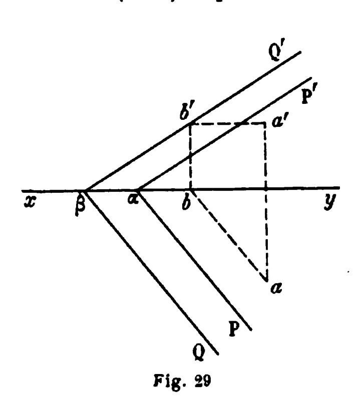


Fig. 29

Problème. — *Mener par une droite un plan parallèle à une droite donnée.*

Par un point quelconque de la première droite on mènera une parallèle à la seconde (13), avec la première droite elle déterminera le plan demandé.

II. — Intersection de deux plans.

22. Un premier cas très simple est celui où les deux plans sont déterminés par leurs traces. Le point d'intersection (a, a') des traces horizontales des deux plans $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ (*fig.* 30) est un premier point

commun aux deux plans. Le point d'intersection (b, b') des traces verticales en est un second. Comme on sait que l'intersection des deux plans est une ligne droite, c'est la droite (ab, $a'b'$).

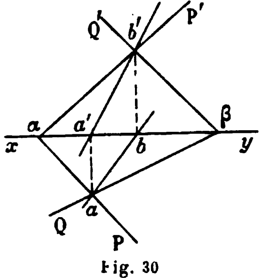


Fig. 30

Remarque. — Si les traces ne se coupent pas dans les limites de l'épure, on peut construire une figure homothétique de la figure donnée en prenant comme centre d'homothétie le point α (15) (*fig.* 31). La représentation du plan $P\alpha P'$ ne change pas ; celle du plan $Q\beta Q'$ devient $Q_1\beta_1Q_1$, le rapport de réduction étant supposé égal à $\frac{1}{2}$.

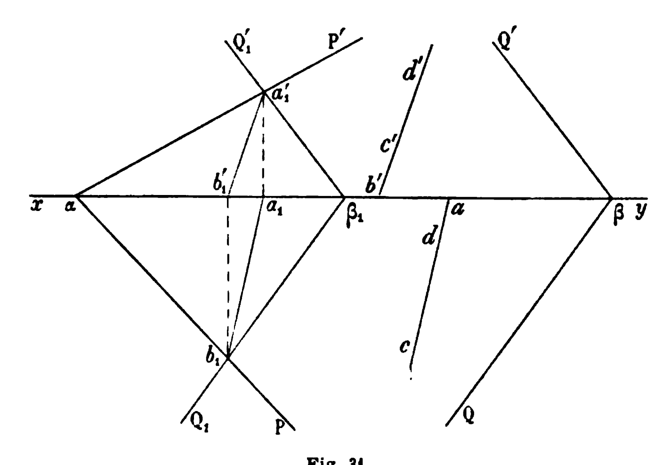


Fig. 31

L'intersection du plan $P\alpha P'$ et du plan $Q_1\beta_1Q'_1$ est la droite (a_1b_1, $a'_1b'_1$). On prendra αa égal à deux fois αa_1 et $\alpha b'$ égal à deux fois $\alpha b'_1$: puis, par le point a on mènera une parallèle cd à la droite a_1b_1 et par le point b' une parallèle $c'd'$ à la droite $a'_1b'_1$. La droite (cd, $c'd'$) est l'intersection demandée.

23. Méthode générale pour trouver un point de l'intersection de deux plans. — Pour obtenir un point de l'intersection de deux plans P et Q, on les coupe par un troisième R.

Le plan R coupe le plan P suivant une droite AB et le plan Q suivant une droite CD. Le point d'intersection des deux droites AB

et CD est un point commun aux deux plans P et Q. Le plan R est dit *plan auxiliaire*.

Il semble au premier abord qu'on soit ramené à un problème analogue au problème proposé puisqu'on doit construire les intersections du plan R avec les deux plans P et Q; mais on a soin de choisir le plan R dont on dispose de manière que son intersection avec un plan donné puisse être facilement déterminée.

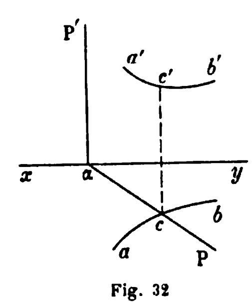


Fig. 32

D'une manière générale, il est aisé de construire l'intersection d'un plan quelconque et d'un plan perpendiculaire à un plan de projection; car il suffit de construire les points d'intersection de ce dernier plan avec deux droites du premier; or rien n'est plus facile que de déterminer le point d'intersection d'un plan perpendiculaire à un plan de projection avec une droite et plus généralement avec une ligne quelconque donnée par ses deux projections.

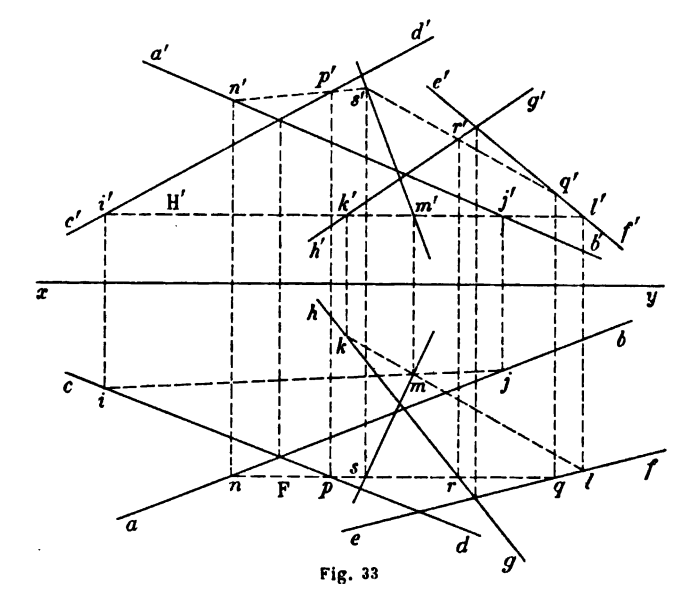


Fig. 33

Soit par exemple le plan vertical PαP' et la ligne $(ab, a'b')$ (*fig.* 32). Comme tout point du plan se projette horizontalement sur sa trace horizontale αP (19) et que les deux projections du point doivent

être respectivement sur les deux projections de la ligne, le point demandé est le point (c, c').

On emploie de préférence comme plans auxiliaires des plans horizontaux et des plans de front. La construction que nous avons donnée dans le cas où les plans sont déterminés par leurs traces revient à prendre comme plans auxiliaires les plans de projection.

Soit à trouver l'intersection du plan P déterminé par les deux droites $(ab, a'b')$ $(cd, c'd')$ et du plan Q déterminé par les deux droites $(ef, e'f')$, $(gh, g'h')$ (*fig.* 33). Nous allons déterminer deux points de l'intersection à l'aide de deux plans auxiliaires. Nous employons comme premier plan auxiliaire le plan horizontal H'; il coupe le plan P suivant la droite $(ij, i'j')$ et le plan Q suivant la droite $(kl, k'l')$ (17). Ces deux droites se coupent en un point (m, m') (14) qui appartient à l'intersection des deux plans. Le plan de front F employé comme second plan auxiliaire coupe le plan P suivant la droite $(np, n'p')$, le plan Q suivant la droite $(qr, q'r')$ et ces deux droites se coupent au point (s, s'), qui est un second point de l'intersection des deux plans P et Q. L'intersection demandée est la droite $(ms, m's')$.

24. Application d'un changement de plan à un cas particulier. — *Construire l'intersection d'un plan parallèle à la ligne de terre déterminé par ses traces* P, P' *et du plan déterminé par la ligne de terre et le point donné* (a, a') (*fig.* 34).

Fig. 34

Nous pourrions, *comme d'ailleurs dans tous les cas*, appliquer la méthode générale. Nous couperions les deux plans par un plan vertical *quelconque*, au lieu d'un plan parallèle à un plan de projection qui nous donnerait dans les deux plans deux droites parallèles à la ligne de terre et qui par conséquent nous indiquerait que l'intersection est parallèle à la ligne de terre mais ne nous en donnerait aucun point.

Nous pouvons encore, puisque la difficulté provient de la situation des plans considérés par rapport aux deux plans de projection, faire un changement de plan vertical en

prenant comme nouveau plan vertical le plan de profil passant par le point (a, a'). Les deux plans donnés sont, dans le nouveau système, perpendiculaires au plan vertical. Le point (a, a') devient (a, a'_1); par suite la nouvelle trace verticale du plan passant par la ligne de terre et le point (a, a'), qui est actuellement un plan de bout, est la droite $\beta Q'_1$, car elle doit contenir les projections verticales de tous les points du plan (19). La nouvelle trace verticale du plan P, P′ est la droite $\alpha P'_1$ $(\beta\beta' = \beta\beta'_1)$. L'intersection des deux plans est, dans le système x_1y_1, la ligne de bout $(mn, m'_1n'_1)$ (22).

Dans le système xy, ce sera la parallèle à la ligne de terre $(mn, m'n')$ $(\beta m' = mm'_1)$.

On pouvait prévoir que l'intersection serait parallèle à la ligne de terre, puisque des deux plans, l'un passe par la ligne de terre, et l'autre lui est parallèle.

III. — Intersection d'une droite et d'un plan.

25. Pour obtenir le point d'intersection d'un plan P et d'une droite AB, par la droite AB on fait passer un plan Q. On détermine la droite d'intersection CD du plan P et du plan Q. Le point d'intersection de la droite AB et de la droite CD est le point demandé.

On choisit d'une manière générale comme plan auxiliaire passant par la droite l'un des plans projetant la droite.

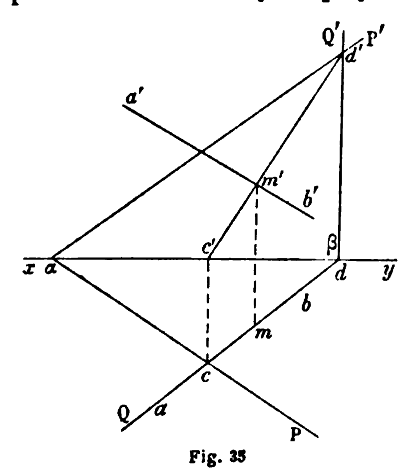


Fig. 35

Soit à trouver l'intersection du plan $P\alpha P'$ donné par ses traces avec la droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 35). Prenons comme plan auxiliaire le plan projetant horizontalement la droite dont la trace horizontale est la droite βQ confondue avec la droite ab, et dont la trace verticale $\beta Q'$ est perpendiculaire à la ligne de terre. L'intersection du plan $P\alpha P'$ et du plan $Q\beta Q'$ est la droite $(cd, c'd')$ (22). Le point demandé est le point d'intersection (m, m') de la droite $(ab, a'b')$ et de la droite $(cd, c'd')$.

26. Point commun à trois plans. — Pour obtenir le point commun à trois plans P, Q, R, on détermine la droite d'intersection des deux plans P et Q, puis le point d'intersection de cette droite et du plan R.

EXERCICES

1. — Mener par un point donné une droite rencontrant deux droites données.

2. — Mener une parallèle à une droite donnée rencontrant deux droites données.

3. — Mener par un point donné une droite parallèle à un plan donné et rencontrant une droite donnée.

4. — Construire les angles avec les plans de projection d'un plan déterminé par sa trace horizontale et un de ses points.

5. — Si un trièdre a un angle dièdre droit, sa section par un plan perpendiculaire à l'une quelconque des arêtes est un triangle rectangle. (On prendra le plan perpendiculaire à l'arête comme plan horizontal et comme plan vertical la face du trièdre qui passe par l'arête et qui est adjacente au dièdre droit.)

6. — On donne la trace verticale d'un plan, et les deux projections d'un point de ce plan. Construire sa trace horizontale.

7. — On donne deux droites AB et CD par leurs projections ; on donne également un point (o, o') situé sur la ligne de terre xy. Trouver l'intersection du plan qui passe par la droite AB et le point O et du plan qui passe par la droite CD et qui est parallèle à la ligne de terre.

CHAPITRE III

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

---

27. Théorème. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan sont que les projections de la droite soient perpendiculaires aux traces de même nom du plan.*

En effet, une droite perpendiculaire à un plan étant perpendiculaire à toute droite du plan, elle est perpendiculaire en particulier à toute horizontale du plan. Comme l'angle droit formé par la droite et une horizontale du plan a un côté parallèle au plan horizontal, il se projette horizontalement suivant un angle droit, et la projection horizontale de la droite est perpendiculaire à la projection horizontale de toute horizontale du plan, et en particulier à la trace horizontale. Le raisonnement est analogue pour la projection verticale. Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Elles sont aussi suffisantes, car, si on imagine une droite dont les deux projections soient perpendiculaires aux traces de même nom du plan, et si par un point de cette droite on mène la perpendiculaire au plan, d'après la première partie du théorème elle a ses projections perpendiculaires aux traces de même nom du plan, elles se confondent donc avec les projections de la droite donnée, et par suite la perpendiculaire se confond avec la droite donnée qui est donc bien perpendiculaire au plan.

Remarque. — La seconde partie du théorème précédent cesse d'être vraie si la droite n'est pas déterminée par ses projections, ce qui arrive quand elle est dans un plan de profil. Ses projections sont alors per-

pendiculaires aux traces de tout plan parallèle à la ligne de terre et pourtant la droite peut ne pas être perpendiculaire au plan.

28. Problème I. — *Mener par un point une perpendiculaire à un plan. Trouver la distance du point au plan.*

Soit le plan $P\alpha P'$ donné par ses traces, et soit un point (a, a') par lequel nous nous proposons de mener une perpendiculaire au plan (*fig.* 36). Des points a et a' nous menons des perpendiculaires aux droites αP et $\alpha P'$; ces deux droites ab, $a'b'$ sont les projections de la perpendiculaire demandée (27). Nous déterminons ensuite le point d'intersection (c, c') de la droite $(ab, a'b')$ avec le plan $P\alpha P'$ (25). Enfin nous construisons la distance ca'_1 des deux points (a, a'), (c, c') (12); c'est la distance demandée.

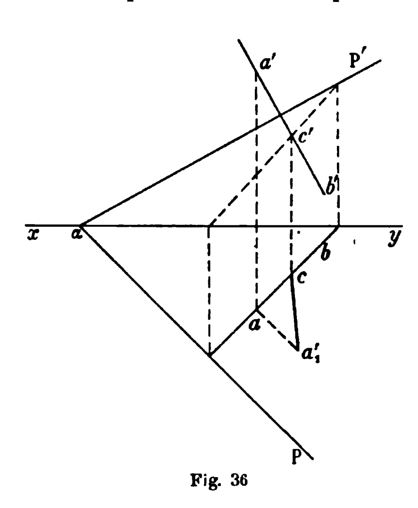


Fig. 36

Remarque. — Si le plan donné est parallèle à la ligne de terre, la perpendiculaire au plan n'est plus déterminée par la construction précédente, car elle est alors dans un plan de profil. Soient par exemple le plan donné par ses traces P, P', et le point (a, a') (*fig.* 37). Nous ferons un changement de plan vertical en prenant comme nouveau plan vertical le plan de profil passant par le point (a, a') ; la nouvelle ligne de terre sera la droite x_1y_1. Dans le nouveau système, le plan donné, perpendiculaire au plan vertical, aura pour traces αP et $\alpha P'_1$ ($bb'_1 = bb'$). Le point donné a pour nouvelle projection verticale a'_1. Nous mènerons la droite $a'_1c'_1$ perpendiculaire à la trace verticale $\alpha P'_1$ du plan. Le point (c, c'_1) est le pied de la perpen-

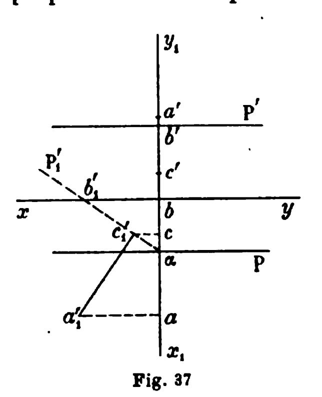


Fig. 37

diculaire. Sa projection verticale dans le premier système est le point c'. La perpendiculaire demandée est donc la droite $(ac, a'c')$. La distance du point au plan est égale à $a'_1c'_1$, car dans le système x_1y_1 la perpendiculaire est dans le plan vertical.

Application. — *Mener par une droite un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Par un point quelconque de la droite on mène une perpendiculaire au plan donné. Le plan déterminé par cette perpendiculaire et par la droite donnée est le plan demandé.

29. Problème II. — *Mener par un point un plan perpendiculaire à une droite donnée. Trouver la distance du point à la droite.*

Proposons-nous de mener par le point (a, a') un plan perpendiculaire à la droite $(bc, b'c')$ (*fig.* 38). Si par le point a nous menons une perpendiculaire ad à la droite bc, la droite ad sera la projection horizontale de l'horizontale du plan cherché qui passe par le point (a, a') (27). La projection verticale de cette horizontale sera la parallèle à la ligne de terre $a'd'$ menée par le point a'. De même la frontale du plan cherché qui passe par le point (a, a') aura pour projection horizontale la parallèle à la ligne de terre af menée par le point a et pour projection verticale la perpendiculaire $a'f'$ à la droite $b'c'$ menée par le point a'. Le plan demandé est déterminé par l'horizontale $(ad, a'd')$ et la frontale $(af, a'f')$.

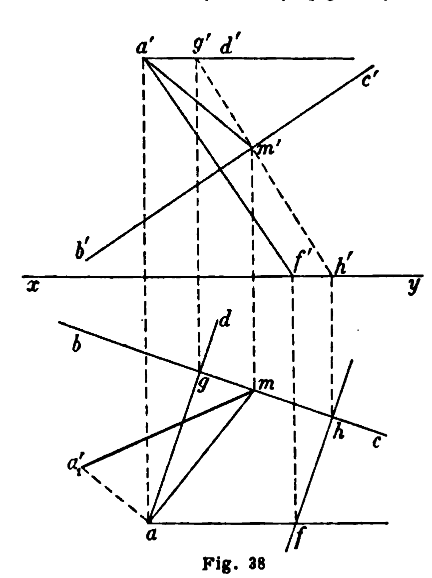


Fig. 38

Pour avoir la distance du point (a, a') à la droite $(bc, b'c')$ on construira d'abord le point d'intersection de cette droite avec le plan des deux droites $(ad, a'd')$, $(af, a'f')$.

Employons comme plan auxiliaire le plan projetant horizontalement

la droite (bc, $b'c'$). Il coupe l'horizontale (ad, $a'd'$) au point (g, g') (23). Son point d'intersection avec la frontale (af, $a'f'$) serait hors des limites de l'épure. Pour obtenir un second point de l'intersection des deux plans nous avons déterminé la trace horizontale fh du plan de l'horizontale (ad, $a'd'$) et de la frontale (af, $a'f'$) en menant par la trace horizontale f de la frontale une parallèle à la projection horizontale ad de l'horizontale. Le point d'intersection (h, h') des traces horizontales des deux plans est un second point de leur intersection. Cette droite d'intersection est donc la droite (gh, $g'h'$) qui coupe la droite (bc, $b'c'$) au point cherché (m, m'). Il n'y a plus qu'à mener la droite (am, $a'm'$), et à construire la distance ma'_1 des deux points (a, a'), (m, m'). C'est la distance demandée.

30. Problème III. — *Construire la perpendiculaire commune à deux droites et déterminer leur plus courte distance.*

1er Cas. — *L'une des droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Soient les deux droites (ab, $a'b'$), (cd, $c'd'$) (*fig.* 39); la première est une verticale. La perpendiculaire commune étant perpendiculaire à une verticale est une horizontale, donc l'angle droit qu'elle forme avec la droite (cd, $c'd'$) se projette horizontalement suivant un angle droit. La projection horizontale de la perpendiculaire commune est donc perpendiculaire à la droite cd, et comme la perpendiculaire commune rencontre la verticale, sa projection horizontale passe par le point a; c'est donc la droite ag. La perpendiculaire commune rencontrant la droite (cd, $c'd'$) le point g a pour projection verticale le point g' sur la droite $c'd'$; enfin la projection verticale de la perpendiculaire commune est parallèle à la ligne de terre. C'est donc la droite (ag, $a'g'$). Puisqu'elle est parallèle au plan horizontal, la plus courte distance des deux droites est égale à ag.

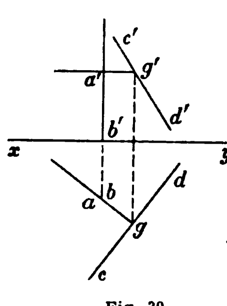


Fig. 39

2e Cas. — *Les deux droites sont quelconques.*

Nous déterminerons d'abord un plan P parallèle aux deux droites; la perpendiculaire commune sera perpendiculaire à ce plan puisqu'elle doit être perpendiculaire à deux droites parallèles au plan. Le pro-

blème sera donc ramené à construire une droite parallèle à une direction donnée et rencontrant les deux droites données.

Pour résoudre ce dernier problème, par l'une des droites nous mènerons une parallèle à la direction donnée; nous construirons l'intersection de l'autre droite et du plan déterminé par cette parallèle et la première droite, et par ce point nous mènerons une parallèle à la direction donnée. Ce sera la perpendiculaire commune aux deux droites.

Soient $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ les deux droites données (*fig.* 40). Par le point (a, a') de la première nous menons la parallèle $(af, a'f')$ à la seconde; elle détermine avec la droite $(ab, a'b')$ un plan parallèle aux

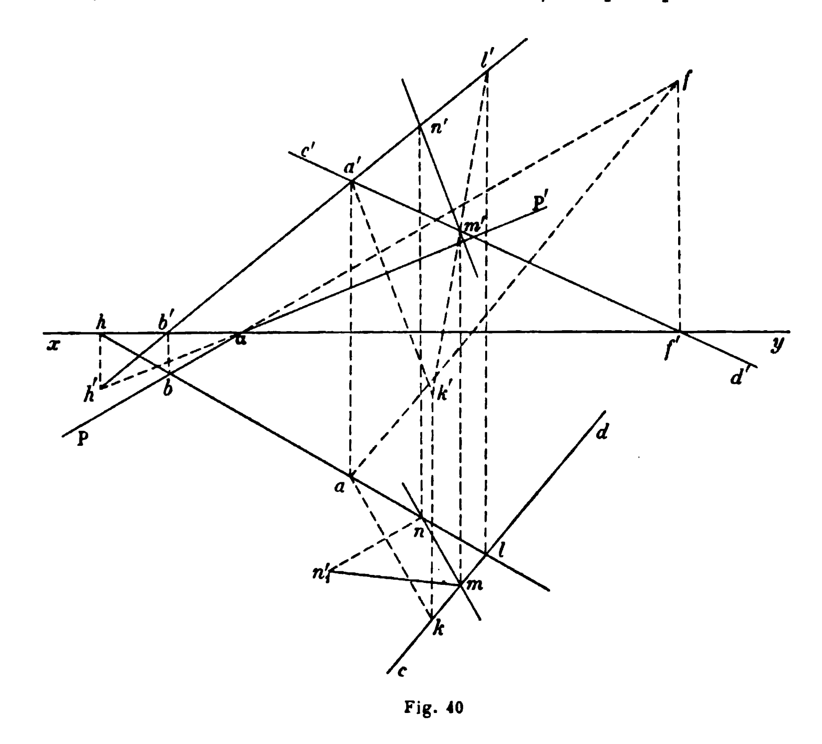


Fig. 40

deux droites dont nous construisons les traces PαP'. La perpendiculaire commune a ses projections perpendiculaires aux traces de ce plan. Par le point (a, a') nous menons la droite $(ak, a'k')$ perpendiculaire au plan PαP' (27). Elle détermine avec la droite $(ab, a'b')$ un plan dont nous construisons le point d'intersection (m, m') avec la droite $(cd, c'd')$ à l'aide du plan projetant horizontalement cette droite. Ce plan, qui est

vertical et qui a pour trace horizontale cd, coupe les deux droites qui déterminent l'autre plan aux points (k, k'), (l, l'). L'intersection des deux plans est donc la droite $(kl, k'l')$. Elle coupe la droite $(cd, c'd')$ au point (m, m') (25). Enfin par le point (m, m') nous menons une parallèle à la droite $(ak, a'k')$. Comme vérification, elle doit rencontrer la droite $(ab, a'b')$. Soit (n, n') le point d'intersection. La perpendiculaire commune aux deux droites est la droite $(mn, m'n')$.

La plus courte distance des deux droites est la distance mn'_1 des deux points (m, m'), (n, n') (12).

EXERCICES

1. — Construire la perpendiculaire commune à la ligne de terre et à une droite donnée par ses deux projections.

2. — On donne une droite par ses deux projections, la projection horizontale d'une seconde droite, et la projection horizontale de leur perpendiculaire commune. Construire la seconde droite et la perpendiculaire commune.

3. — Construire le lieu des points de l'espace qui sont distants d'un plan donné d'une longueur donnée. — Comme cas particulier, supposer le plan donné parallèle à la ligne de terre.

4. — On donne trois droites passant par un même point et formant un trièdre. Construire la droite commune aux trois plans menés par chaque arête du trièdre perpendiculairement à la face opposée.

5. — Trouver la distance d'un point à un plan déterminé par deux droites qui se coupent.

6. — Mener dans un plan une droite perpendiculaire à une droite donnée hors de ce plan.

CHAPITRE IV

RABATTEMENTS. APPLICATION A LA DÉTERMINATION DES ANGLES

I. — Rabattements.

31. Étant donnée une figure dans un plan, si l'on fait tourner ce plan autour d'une de ses horizontales jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle au plan horizontal et qu'on projette alors la figure donnée sur le plan horizontal, elle se projettera suivant une figure égale sur laquelle on pourra effectuer telle mesure ou telle construction que l'on voudra. Cette opération s'appelle un *rabattement sur le plan horizontal*. Ayant effectué les constructions qui servent à déterminer les éléments inconnus de la figure, on supposera que le plan soit ramené à sa position première et l'on construira les projections des éléments que l'on avait besoin de connaître ; on dit alors qu'on a *relevé* le plan. On voit qu'on aura recours au rabattement quand on devra effectuer certaines constructions ou déterminer certains éléments dans un plan qui n'est pas parallèle au plan horizontal. Quand on rabat un plan on appelle *rabattement d'un point* du plan la projection de la position occupée par ce point après la rotation du plan. Nous allons établir les règles qui permettent de trouver le rabattement d'un point, et inversement de relever un point donné par son rabattement. Nous donnerons le nom de *charnière* à l'horizontale autour de laquelle le plan effectue sa rotation.

32. Construction du rabattement d'un point. — Nous supposerons

d'abord que le plan que l'on rabat soit perpendiculaire au plan vertical et qu'il s'agisse de rabattre un point de sa trace verticale.

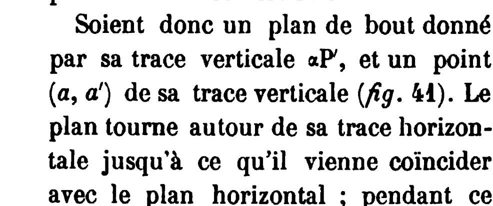


Fig. 41

Soient donc un plan de bout donné par sa trace verticale $\alpha P'$, et un point (a, a') de sa trace verticale (*fig.* 41). Le plan tourne autour de sa trace horizontale jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec le plan horizontal ; pendant ce mouvement le point a' qui est dans le plan vertical, décrit une circonférence située dans le plan vertical, ayant pour centre le point α et pour rayon la longueur $\alpha a'$. Le point a' vient donc occuper la position A_1 qui est le rabattement du point (a, a'). L'angle dont a tourné le plan est l'angle $a\alpha P'$.

Cas général. — Soient P le plan horizontal de projection, Q le plan que l'on rabat sur le plan horizontal H passant par son horizontale BC, et A le point du plan Q dont on se propose de construire le rabattement (*fig.* 42). Soient *bc* la projection de l'horizontale BC et *a* la projection du point A. Menons par le point A dans le plan Q la perpendiculaire AD à la droite BC. Soit *d* la projection du point D. Le plan AD*da* est le plan projetant la droite AD, car, passant par D*d*, il est perpendiculaire au plan P. Prenons comme nouveau plan vertical ce plan AD*d* et en même temps supposons qu'on prenne comme plan horizontal de projection le plan horizontal H, ce qui revient à diminuer toutes les cotes de la longueur D*d*. Dans ce nouveau système le plan Q est perpendiculaire au plan vertical puisqu'il passe par la droite BC qui est perpendiculaire au plan AD*d* comme étant perpendiculaire aux droites DA et D*d*, et le point A est un point de sa trace verticale AD ; enfin on rabat le plan Q autour de sa trace horizontale BC sur le plan horizontal de projection H. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

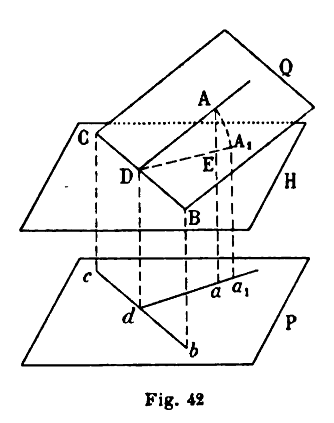


Fig. 42

Supposons sur l'épure le plan Q déterminé par l'horizontale $(bc, b'c')$ prise comme charnière et par le point (a, a') que l'on se propose de rabattre (*fig.* 43). *Par le point a nous menons la perpendiculaire ad à la projection horizontale bc de la charnière*, c'est la nouvelle ligne de terre x_1y_1. La nouvelle projection verticale du point (a, a') est le point a'_1, *la longueur* aa'_1 *étant égale à la différence* λ' *entre la cote du point* A *et celle de la charnière* ; la nouvelle trace verticale du plan est la droite da'. *En décrivant du point d comme centre avec* da'_1 *comme rayon un arc de circonférence, il coupe la droite da au point* A_1 *qui est le rabattement du point* (a, a').

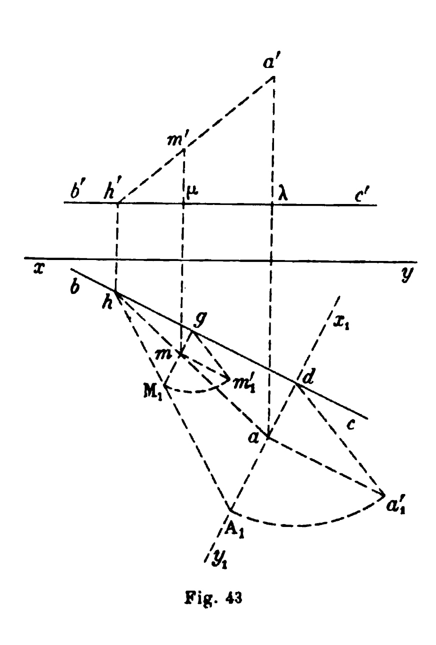


Fig. 43

L'angle dont le plan a tourné est l'angle ada'_1, nous l'appellerons *l'angle du rabattement* ; il est le même pour tous les points du plan de sorte que toutes les droites telles que da'_1 sont parallèles.

En général un point de l'espace étant désigné par une lettre majuscule nous représenterons son rabattement par la même lettre affectée d'un indice (A_1). Il ne saurait y avoir de confusion avec les projections cotées que nous définirons plus loin, car ces projections seront toujours affectées de lettres minuscules.

Remarque. — On peut imaginer que pour devenir parallèle au plan horizontal le plan que l'on rabat tourne dans un sens ou dans l'autre autour de la charnière ; on peut donc porter la longueur dA_1 d'un côté ou de l'autre de la droite bc ; mais, quand on a déterminé le rabattement d'un point, on a, par la position qu'on a choisie, fixé le sens de la rotation du plan, de sorte que les positions des rabattements des autres points du plan sont parfaitement déterminées. Il est d'ailleurs facile d'éviter toute hésitation en remarquant que la

droite qui joint deux points et la droite qui joint leurs rabattements doivent se couper sur la projection horizontale de la charnière, car le point où une droite du plan coupe la charnière reste fixe et par suite sa projection se confond avec son rabattement.

Cette dernière remarque permet de construire rapidement le rabattement d'un second point du plan. Soit m la projection horizontale de ce point (*fig.* 43). On tracera la droite am qui coupe la projection horizontale de la charnière au point h. Le rabattement M_1 du point considéré sera à l'intersection de la droite A_1h et de la perpendiculaire menée par le point m à la projection horizontale bc de la charnière.

33. Cas particuliers. — 1er Cas. — *Le plan que l'on rabat est vertical.*

Soit à rabattre le plan $P\alpha P'$ sur le plan horizontal autour de l'horizontale $(ab, a'b')$ (*fig.* 44). Proposons-nous de construire le rabattement du point (m, m') du plan. Dans le cas actuel la distance du point (m, m') à la charnière est égale à la différence $\mu m'$ des cotes des points (m, m') et de la charnière (31). On mènera donc la droite mM_1 perpendiculaire à la droite ab et on prendra la longueur mM_1 égale à la longueur $\mu m'$; le point M_1 sera le point demandé.

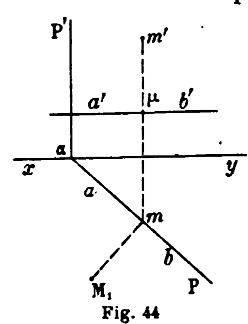


Fig. 44

2e Cas. — *Le plan que l'on rabat est un plan de bout.*

Soit à rabattre le plan $P\alpha P'$ sur le plan horizontal autour de l'horizontale $(ab, a'b')$ (*fig.* 45). Proposons-nous de construire le rabattement du point (m, m') du plan. Il est d'abord sur la perpendiculaire cm menée du point m à la projection horizontale de la charnière.

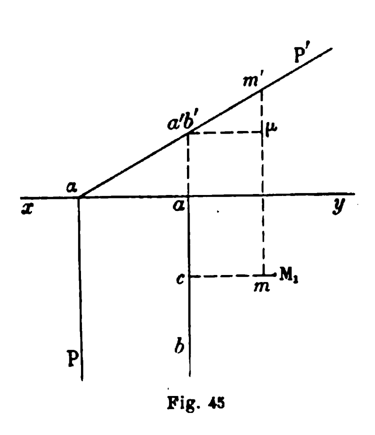


Fig. 45

Pour avoir la distance cM, il resterait à construire un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit la distance cm d'une part et de l'autre la différence des cotes du point (m, m') et de la

charnière ; mais ce triangle n'est autre que le triangle $a'\mu m'$. Il suffit donc de prendre la longueur cM_1 égale à la longueur $a'm'$ pour avoir le rabattement M_1 demandé. Il est inutile, quand on fait la construction, de tracer la ligne $a'\mu$.

34. Problème inverse. — *Un plan étant rabattu sur le plan horizontal, relever un point de ce plan dont on donne le rabattement.*

Soit M_1 le rabattement donné d'un point du plan déterminé par le point (a, a') et l'horizontale $(bc, b'c')$ (*fig.* 43). Nous mènerons la droite M_1g perpendiculaire à la droite bc, puis la droite gm'_1 parallèle à la droite da'_1 (32); nous prendrons la longueur gm'_1 égale à la longueur gM_1, et par le point m'_1 nous mènerons la droite m'_1m parallèle à la droite bc; le point m où elle rencontre la droite M_1g sera la projection horizontale du point relevé. Pour avoir sa projection verticale nous remarquerons que gm'_1 est la différence entre la cote du point (m, m') et celle de la charnière; nous mènerons donc la ligne de rappel du point m et nous prendrons $\mu m' = gm'_1$, m' et a' étant situés par rapport à la projection verticale de la charnière comme M_1 et A_1 sont situés par rapport à sa projection horizontale bc.

Si le point de rencontre de la droite A_1M_1 et de la projection horizontale de la charnière est dans les limites de l'épure, on pourra, pour relever le point M_1, faire usage de la remarque du n° 32. La figure 43 montre comment on obtiendra le point m.

On aura sans difficulté la projection verticale m' en remarquant que la projection verticale du point h est sur la projection verticale de la charnière.

Le point m' sera sur la droite $a'h'$.

35. Rabattement d'un plan sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale. — Soit un plan $P\alpha P'$ déterminé par ses traces (*fig.* 46). Rabattons-le sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale et supposons qu'on ait à rabattre un certain nombre de points du plan. Nous commencerons par rabattre la trace verticale du plan de la manière suivante : soit (a, a') un point quelconque de cette trace verticale; il se rabat sur la perpendiculaire ab menée par le point a à la trace horizontale αP. D'autre part, pendant la rotation du plan, le point α qui est sur la charnière

reste fixe et le point (a, a') de la trace verticale du plan reste constamment à une distance du point α égale à $\alpha a'$ qui est la distance dans l'espace du point α au point (a, a') du plan vertical. Donc, si nous prenons le point d'intersection A_1 de la droite ab avec la circonférence décrite du point α comme centre avec $\alpha a'$ comme rayon, la trace verticale du plan se rabat suivant la droite αA_1. La droite ab rencontre d'ailleurs la circonférence en deux points auxquels correspondent les deux positions que peut occuper la trace verticale du plan après sa rotation suivant qu'on l'a fait tourner dans un sens ou dans l'autre. Supposons qu'on ait fait tourner le plan de sorte que sa trace verticale se rabatte suivant la droite αA_1.

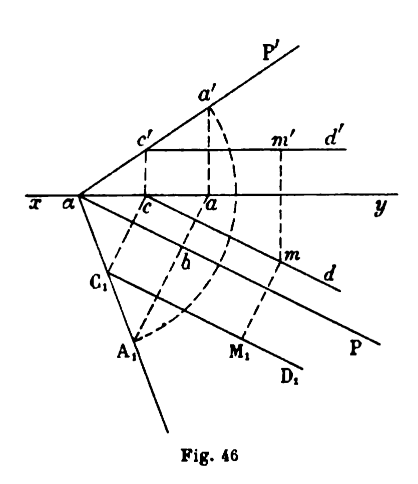


Fig. 46

Proposons-nous maintenant de rabattre un point quelconque (m, m') du plan $P\alpha P'$. Construisons l'horizontale $(cd, c'd')$ du plan passant par le point (m, m') ; cette horizontale rencontre la trace verticale du plan au point (c, c') qui se rabat au point C_1 sur le rabattement de la trace verticale ; comme, pendant la rotation du plan, l'horizontale $(cd, c'd')$ reste parallèle à la charnière αP, elle se rabat suivant la droite C_1D_1 parallèle à la droite αP menée par le point C_1. Le rabattement du point (m, m') sera donc le point d'intersection M_1 de la perpendiculaire mM_1 à la droite αP avec la droite C_1D_1.

Inversement, on voit aisément sur la figure comment, étant donné le rabattement M_1 d'un point du plan, on obtient les projections m et m' de ce point.

36. Rabattement d'un plan autour d'une de ses frontales. — On peut supposer qu'on fasse tourner un plan autour d'une de ses frontales jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan vertical. Tout ce que

nous avons établi sur le rabattement autour d'une horizontale s'applique naturellement au rabattement autour d'une frontale. Il n'y a qu'à échanger les projections horizontales et les projections verticales, et les cotes et les éloignements.

II. — Détermination des angles.

37. Problème I. — *Construire l'angle de deux droites.*

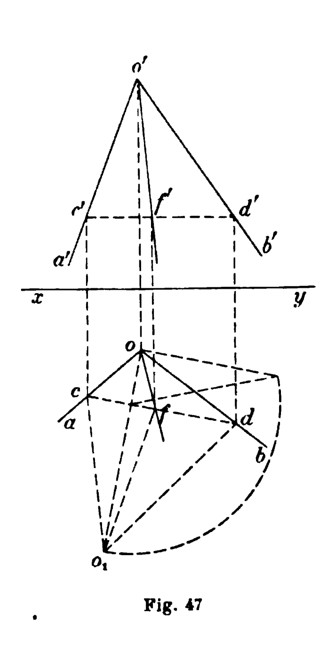


Fig. 47

L'angle de deux droites qui ne se coupent pas étant l'angle des parallèles aux deux droites menées par un point de l'espace, nous pouvons exposer la méthode sur deux droites (oa, $o'a'$), (ob, $o'b'$), qui se coupent au point (o, o') (*fig.* 47). L'angle que nous voulons évaluer étant situé dans le plan déterminé par les deux droites, nous rabattrons ce plan autour d'une de ses horizontales (cd, $c'd'$) par exemple. Le point (o, o') se rabat au point O_1, les points c et d restant fixes, de sorte que l'angle cherché est l'angle cO_1d.

Remarque. — On a immédiatement les projections de la bissectrice de l'angle des deux droites, car son rabattement est la bissectrice O_1f de l'angle cO_1d. Elle se relève suivant la droite (of, $o'f'$).

38. Problème II. — *Déterminer l'angle d'une droite et d'un plan.*

Par un point quelconque de la droite on mène une perpendiculaire au plan; on détermine l'angle de cette perpendiculaire avec la droite donnée (37), c'est le complément de l'angle cherché.

39. Problème III. — *Construire l'angle de deux plans.*

Par un point quelconque de l'espace, nous mènerons des perpendi-

culaires aux deux plans donnés ; ces deux perpendiculaires forment deux angles supplémentaires qui sont respectivement égaux aux deux angles formés par les deux plans.

Si nous prenons le point par lequel nous menons les deux perpendiculaires sur l'intersection des deux plans, la bissectrice de l'angle qu'elles forment se confond avec celle de l'angle plan du dièdre déterminé par le plan de ces deux perpendiculaires. Cette bissectrice détermine donc, avec l'intersection des deux plans, le plan bissecteur de l'angle des deux plans.

Soient les deux plans PαP′, QβQ′ (*fig.* 48) qui se coupent suivant la droite (*ab*, *a′b′*). Par le point (*o*, *o′*) choisi sur cette droite nous menons

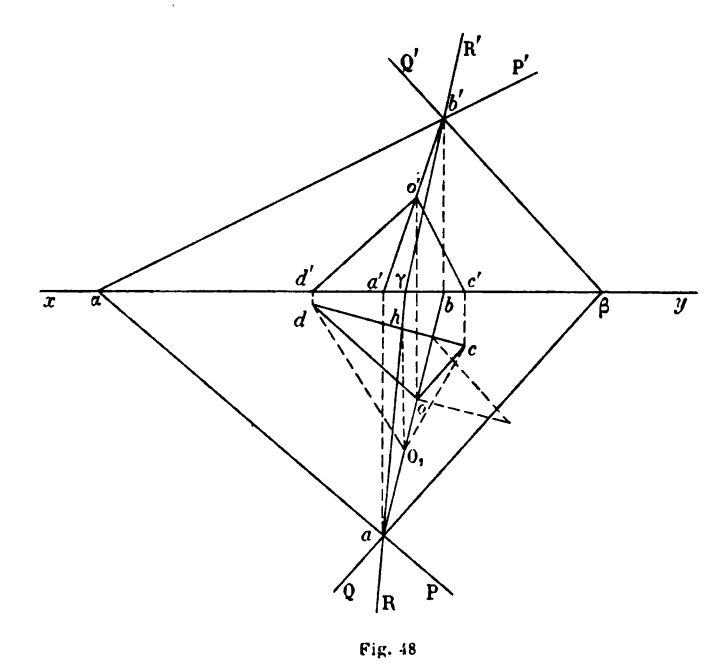


Fig. 48

les droites (*oc*, *o′c′*), (*od*, *o′d′*) perpendiculaires aux deux plans (28). Nous déterminons l'angle cO_1d de ces deux droites (37) (nous avons rabattu leur plan autour de sa trace horizontale *cd*), c'est l'un des angles formés par les deux plans. Pour construire le *plan bissecteur* de cet angle, nous menons la bissectrice O_1h de l'angle rabattu cO_1d. Le plan bissecteur est déterminé par la droite (*oh*, *o′h′*) et la droite (*ab*,

a'b'). Le point *h* est dans le plan horizontal ; c'est donc un point de la trace horizontale du plan qui est par conséquent la droite *ah* (17).

Sa trace verticale sera la droite $\gamma R'$, en désignant par γ le point où la droite *ah* coupe la ligne de terre. Le plan bissecteur est le plan $R\gamma R'$.

Remarque. — La trace horizontale *cd* du plan déterminé par les deux perpendiculaires aux deux plans est la trace d'un plan perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans ; elle est donc perpendiculaire à la droite *ab* (27).

Pour éviter de compliquer la figure nous n'avons pas tracé la droite (*oh*, *o'h'*) non plus que le point *h'*; il n'est pas nécessaire de les tracer pour obtenir le plan $R\gamma R'$.

EXERCICES

1. — Etant donnés trois points par leurs projections, construire : 1° le point de concours des hauteurs du triangle dont ils sont les sommets, 2° le point de concours des médianes, 3° le point de concours des bissectrices du même triangle.

2. — Etant donnés trois points par leurs projections, construire les projections du lieu géométrique des points de l'espace équidistants de ces trois points.

3. — Trouver l'angle d'une droite et d'un plan parallèle à la ligne de terre.

4. — Construire les projections du centre d'une circonférence de rayon donné, située dans un plan donné et tangente aux deux traces de ce plan.

5. — Déterminer l'angle d'une droite avec la ligne de terre. Construire la bissectrice de cet angle.

6. — On donne les projections d'une droite parallèle au plan horizontal, et un point A sur la ligne de terre. Déterminer sur la droite donnée deux points B et C tels que le triangle de l'espace ABC soit équilatéral.

7. — On donne dans le plan horizontal, une droite *ab* rencontrant en *b* la ligne de terre *xy*. Déterminer la projection verticale *bc'* d'une droite menée par *b* dans le plan vertical, et faisant avec *ab* un angle donné θ. — Construire ensuite les traces du plan bissecteur de l'angle formé par le plan de ces deux droites avec le plan horizontal.

8. — Construire l'angle d'un plan donné avec la ligne de terre.

9. — Construire l'angle que font deux plans dont les traces horizontales sont parallèles, ainsi que les traces du plan bissecteur de l'angle dièdre formé par les deux plans.

10. — Angle de deux plans dont les traces verticales sont parallèles.

11. — On donne les projections d'une droite AB et celles d'un point C. On demande de trouver les projections d'une droite passant par C, rencontrant AB et faisant avec cette dernière un angle donné.

12. — Construire les traces de deux plans parallèles à la ligne de terre et faisant entre eux un angle de 45°.

13. — Deux droites étant données par leurs projections, on demande de construire celles d'une troisième droite déterminée par les conditions : 1° de rencontrer la première; 2° d'être parallèle à la seconde ; 3° de laisser entre les plans de projection un segment de longueur donnée.

14. — Déterminer les projections de la base d'un triangle, connaissant les projections des deux autres côtés et la projection horizontale du pied de la hauteur.

15. — Trouver les projections du centre de la circonférence qui passe par deux points du plan horizontal et un point du plan vertical.

16. — On donne dans le plan horizontal de projection, deux droites concourantes *ab*, *ac*, et on demande de construire les projections d'une troi-

sième droite passant par le point *a*, qui ait *ab* pour projection horizontale, et fasse avec *ac* un angle donné ω.

17. — On donne un plan $P\alpha P'$ par ses traces. On prend sur la trace horizontale un point A et sur la trace verticale un point B. Trouver les projections du centre de gravité du triangle $A\alpha B$ et rabattre ce point sur le plan vertical de projection.

DEUXIÈME PARTIE

MÉTHODE DES PROJECTIONS COTÉES

CHAPITRE I

REPRÉSENTATION DU POINT ET DE LA LIGNE DROITE

40. **Représentation du point.** — Nous avons vu (1) que dans la méthode des projections cotées on représente un point par sa projection sur un plan arbitrairement choisi, appelé *plan horizontal ou de comparaison*, accompagnée du nombre qui mesure la cote de ce point avec une unité de longueur connue, la cote devant être portée d'un côté du plan si le nombre qui la mesure est positif, et du côté opposé s'il est négatif. L'épure d'un point se compose donc de sa projection *a* à côté de laquelle on a inscrit, parallèlement au bord inférieur de la feuille, le nombre qui mesure la cote du point (l'unité de longueur qui a servi à mesurer la cote est donnée) (*fig.* 49).

a 4,3

Fig. 49

La projection cotée d'une figure de l'espace porte le nom de *plan coté*. D'une manière générale la projection d'une figure sur le plan horizontal porte le nom de *plan*, tandis que sa projection sur un plan vertical porte celui d'*élévation*.

Dans les applications de la méthode des projections cotées on suppose en général que le plan de comparaison est le plan du niveau des mers. Les longueurs portées au-dessus de ce plan sont appelées *altitudes*, tandis que celles qui sont portées au-dessous prennent le nom de *profondeurs*. Généralement les altitudes sont considérées comme étant

mesurées par les nombres positifs et les profondeurs par les nombres négatifs; il y a exception pour les cartes marines où ne sont indiquées que des profondeurs qui sont alors considérées comme positives.

Échelle du dessin. — Un plan coté doit toujours être accompagné d'une échelle. C'est une droite AB (*fig.* 50) sur laquelle on a figuré la longueur conventionnelle AC qui représente sur le dessin l'unité de longueur véritable avec laquelle sont mesurées les différentes longueurs qui entrent dans ce dessin. Par exemple, si l'unité de longueur est le mètre, la longueur AC représente une longueur d'un mètre. En comparant à cette longueur une longueur quelconque du dessin, on aura la mesure de cette longueur en mètres et fractions de mètre. Pour faciliter cette comparaison, l'échelle est accompagnée d'une *contre-échelle* AD. C'est une longueur égale à la longueur AC qu'on a partagée en dix parties égales; elle représente 100 centimètres et chaque partie représente un décimètre.

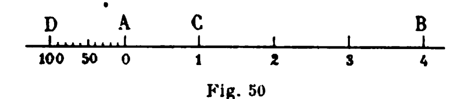


Fig. 50

Si l'on a pris, par exemple, la longueur AC égale à un centimètre, on dit que l'échelle est d'un centimètre pour un mètre, ou encore que l'épure est exécutée au centième. De même si l'on avait représenté un mètre par une longueur de deux centimètres, l'épure aurait été dite au cinquantième.

Il importe de remarquer que les cotes sont indiquées dans leur grandeur naturelle, c'est-à-dire que si, par exemple, on a pris pour unité de longueur le mètre, les nombres inscrits sur le plan coté représentent des mètres et fractions de mètre. Si l'on veut faire une projection verticale de la figure que l'on étudie, il faut par conséquent réduire les cotes à l'échelle du dessin. Ajoutons cependant qu'on peut étudier séparément les deux projections réduites à des échelles différentes. Il est clair en effet que si l'on étudie une surface dans laquelle les altitudes varient de quelques mètres pour des étendues horizontales de plusieurs kilomètres, si l'on veut faire une élévation de cette surface, il faudra, pour que l'on puisse s'en rendre compte, choisir une échelle bien supérieure à celle du *plan coté* de cette surface où les kilomètres étant représentés par des décimètres, par exemple, les mètres devraient être représentés par des dixièmes de millimètre. Dans ce cas on pourra choisir l'échelle de l'élévation d'un centimètre pour un mètre, ce qui revient à la prendre cent fois plus grande que celle du plan.

41. Représentation de la ligne droite. — Une ligne droite est déterminée par la connaissance de deux de ses points ; comme la projection d'une ligne droite est en général une ligne droite (6), l'épure d'une ligne droite se composera en général de deux points *a* et *b* accompagnés de leurs cotes et de la droite qui les joint (*fig.* 51).

$a_{3,2}$ $b_{5,75}$

Fig. 51

Verticale. — Horizontale. — Comme tous les points d'une verticale se projettent au même point, l'épure d'une verticale se compose d'un point sans cote *a* (*fig.* 52).

Une horizontale est donnée d'abord par sa projection horizontale. Tous ses points ont même cote ; on inscrit cette cote une seule fois le long de la projection de l'horizontale, mais parallèlement à cette projection. Par exemple la droite *bc* (*fig.* 52) est la projection d'une horizontale dont tous les points ont pour cote 4.

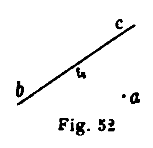


Fig. 52

42. Problème fondamental. — *On donne une droite* AB *par les projections cotées* a, b *de deux de ses points* (*fig.* 53) :

1° *Étant donnée la projection d'un point de la droite, trouver sa cote.*

2° *Trouver la projection d'un point de la droite connaissant la cote de ce point.*

Procédé graphique. — Imaginons qu'on ait fait tourner le plan vertical qui projette horizontalement la droite AB autour de sa trace horizontale *ab* jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal. La droite AB prendra la position A_1B_1, les perpendiculaires aA_1, bB_1 à la droite *ab* étant égales, la première à 3,2, la seconde à 5,7 (à l'échelle du dessin). Menons la droite A_1D_1 parallèle à la droite *ab*.

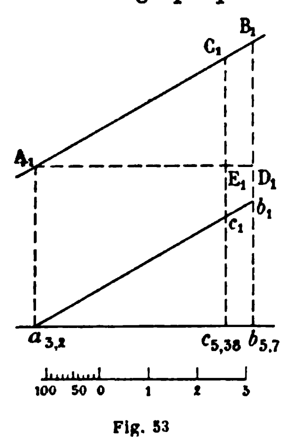


Fig. 53

1° Soit *c* la projection du point de la droite dont on demande la cote. Menons la perpendiculaire cE_1C_1 à la droite *ab* ; cC_1 sera la cote du point de la droite qui se projette au point *c*. On doit donc appliquer la règle suivante :

Règle. — *On mène à la droite* ab *les perpendiculaires* aA_1, bB_1,

égales respectivement à 3,2 *et à* 5,7 *et l'on mène la droite* A_1B_1. *Par le point* c *on trace la perpendiculaire* cC_1 *à la droite ab. On mesure à l'échelle du dessin la longueur de la droite* cC_1, *c'est la cote du point de la droite qui se projette au point c.*

REMARQUE. — On peut simplifier un peu la construction : menons la droite ab_1 parallèle à la droite A_1B_1. Les deux triangles rectangles égaux $A_1B_1D_1$, ab_1b nous donnent : $bb_1 = D_1B_1$. On a de même : $cc_1 = E_1C_1$. Donc la longueur bb_1 est égale à la différence des cotes des points A et B et cc_1 à la différence des cotes des points A et C. Par suite : *on élève au point b une perpendiculaire à ab égale à la différence des cotes des points* A *et* B *et l'on joint les points a et* b_1 *par une ligne droite. On mesure à l'échelle du dessin la perpendiculaire* cc_1 *à ab et on ajoute le nombre obtenu à la cote du point* A. Pour un point *d* situé de l'autre côté du point *a* par rapport au point *b* (*fig.* 54), il faudrait retrancher le nombre qui mesure la longueur dd_1 de la cote du point *a*. On obtient pour le point *d* : $3,2 - 1,7 = 1,5$.

L'opération que nous venons de faire est le rabattement du plan projetant la droite autour de l'horizontale de ce plan passant par le point A (33).

2° *La droite* AB *étant donnée par les projections cotées a, b, de deux de ses points, on demande de construire la projection du point de la droite qui a pour cote* 6,8 (*fig.* 54).

Nous mènerons par le point *b* la perpendiculaire bb_1 à la droite *ab* sur laquelle nous prendrons la longueur bb_1 égale à la différence des cotes des points B et A ($5,7 - 3,2 = 2,5$). Nous tracerons la droite ab_1 et nous formerons la différence entre la cote donnée et celle du

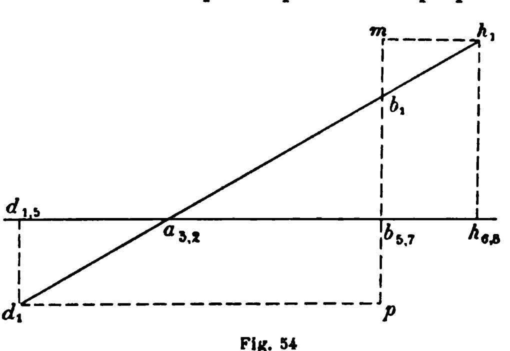


Fig. 54

point A($6,8 - 3,2 = 3,6$). Sur la droite bb_1 nous prendrons la longueur *bm* égale à 3,6 et nous mènerons la droite mh_1 parallèle à la droite *ab*. Par le point h_1 où elle coupe la droite ab_1 nous tracerons

la droite hh_1 perpendiculaire à la droite ab ; d'après la remarque de la première partie du problème, le point h est le point demandé.

Remarque. — Si l'on demandait la projection du point de la droite qui a pour cote 1,5, nombre inférieur à la cote du point A, on formerait la différence $3{,}2 - 1{,}5 = 1{,}7$, et on la porterait sur bb_1, mais de l'autre côté de ab suivant bp. On achèverait comme précédemment et le point demandé serait le point d.

Procédé arithmétique. — Si l'on craint que le procédé que nous venons d'indiquer ne donne pas la cote d'un point avec toute la précision désirable, on peut, au lieu de mesurer cette cote sur le dessin, la calculer à l'aide des éléments connus. Dans la pratique on opère généralement d'abord par le procédé graphique et c'est seulement pour la détermination des points les plus importants de l'épure que l'on a recours au procédé arithmétique que nous allons exposer.

1° *Supposons qu'on se propose de calculer la cote du point situé sur la droite* AB *et qui se projette au point c. La droite* AB *est déterminée par les projections cotées de deux de ses points* A *et* B (*fig.* 55).

Nous imaginons qu'on ait rabattu comme précédemment le plan vertical projetant la droite AB. Les triangles semblables $A_1B_1D_1$, $A_1C_1E_1$ nous donnent

$$\frac{E_1C_1}{D_1B_1} = \frac{A_1E_1}{A_1D_1} = \frac{ac}{ab}.$$

On mesurera les longueurs ab et ac à l'échelle du dessin ; la longueur D_1B_1 est la différence des cotes des points A et B, donc l'égalité précédente permet de calculer E_1C_1. Il suffira d'ajouter la valeur obtenue pour E_1C_1 à la cote du point A pour avoir la cote du point de la droite projeté au point c. On a

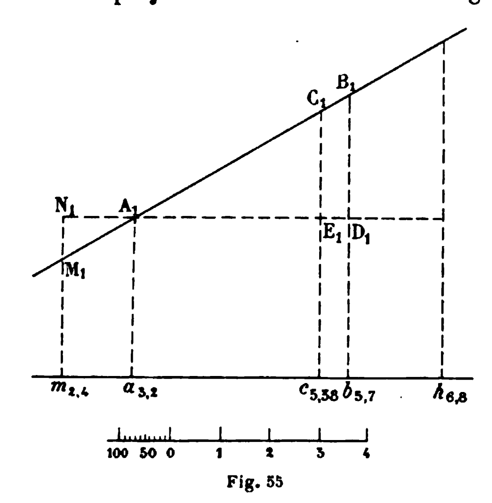


Fig. 55

$$E_1C_1 = D_1B_1 \times \frac{ac}{ab}$$

et par suite

$$cC_1 = cE_1 + E_1C_1 = aA_1 + D_1B_1 \times \frac{ac}{ab}.$$

Désignons par α *la cote de celui des deux points définissant la droite qui est le plus voisin du plan de comparaison, par* δ *la différence des cotes de ces deux points, par* β *le nombre qui mesure, à l'échelle du dessin, la distance des projections de ces deux points, et par* γ *la distance de la projection du premier de ces deux points à la projection du point dont on cherche la cote ; en désignant cette cote par* x, *on aura la formule :*

$$(1) \qquad x = \alpha + \delta \times \frac{\gamma}{\beta}.$$

Pour le point dont la projection est c on a

$$\alpha = 3{,}2, \qquad \delta = 5{,}7 - 3{,}2 = 2{,}5, \qquad \gamma = 3{,}8, \qquad \beta = 4{,}35.$$

On obtient

$$x = 5{,}38.$$

Remarque. — Il est aisé de voir que la formule (1) est tout à fait générale si l'on convient de considérer le nombre γ comme négatif quand la projection du point donné est de l'autre côté du point a par rapport au point b, comme il arrive par exemple pour le point m. ($\gamma = -1{,}4, \quad \delta \times \frac{\gamma}{\beta} = -0{,}8, \quad x = 2{,}4$).

2° *Supposons qu'on demande la projection du point de la droite* AB *qui a pour cote* 6,8. Il n'y a qu'à tirer γ de la formule (1) qui nous donne

$$6{,}8 = 3{,}2 + 2{,}5 \times \frac{\gamma}{4{,}35}.$$

On obtient

$$\gamma = \frac{(6{,}8 - 3{,}2) \times 4{,}35}{2{,}5} = 6{,}26.$$

On prend la longueur ah égale à 6,26 à l'échelle du dessin. Le point demandé est le point h.

Trace horizontale de la droite. — On obtient la trace horizontale de la droite en déterminant le point qui a pour cote zéro.

43. Équidistance. — Points à cote ronde. — Intervalle. — Pente. — Quand on représente une figure de l'espace en géométrie cotée, on trace sur l'épure les projections de ses sections par des plans horizontaux également distants les uns des autres. Ces plans horizontaux

portent le nom de ***plans de niveau***. La distance arbitraire de deux plans de niveau consécutifs s'appelle l'***équidistance***. Cette longueur est arbitraire. On donne le nom d'***équidistance graphique*** à la longueur de l'équidistance représentée à l'échelle du dessin. Si par exemple l'équidistance est d'un mètre et que l'échelle soit au $\frac{1}{50}$, l'équidistance graphique sera de deux centimètres.

Les plans de niveau successifs rencontrent la droite en des points qu'on appelle ***points à cote ronde***. La distance qui sépare les projections de deux points à cote ronde consécutifs est constante. Considérons en effet sur une droite deux points consécutifs à cote ronde a et b, et deux autres points consécutifs à cote ronde c et d (*fig.* 56).

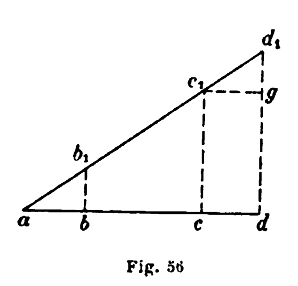


Fig. 56

Si l'on construit le rabattement de la droite autour de l'horizontale du point a (41) et qu'on mène la droite c_1g parallèle à la droite ad, les deux triangles rectangles abb_1, c_1gd_1 sont égaux, car ils ont les angles égaux et les côtés bb_1, gd_1 sont égaux à l'équidistance. Donc $ab = c_1g = cd$.

Cette distance constante des projections de deux points à cote ronde consécutifs s'appelle l'***intervalle*** de la droite.

On appelle *pente* de la droite la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle fait avec sa projection horizontale, c'est-à-dire avec le plan horizontal. C'est la tangente de l'angle bab_1. Elle est égale au rapport de l'équidistance bb_1 à l'intervalle ab. On a donc la formule

$$(2) \qquad p = \frac{e}{i},$$

en désignant par p la pente de la droite, par e l'équidistance et par i l'intervalle.

On peut d'ailleurs prendre ce rapport comme définition de la pente.

L'ensemble des points à cote ronde s'appelle l'***échelle de pente*** de la droite (*fig.* 57) (l'équidistance est supposée de 2^{m},50).

0 2,5 5 7,5 10

Fig. 57

Dans la théorie nous supposerons que l'équidistance est égale à un mètre. Dans ce cas les points à cote ronde sont les points qui ont pour cotes les

nombres entiers. La formule (2) nous donne alors

$$p = \frac{1}{i}:$$

La pente est l'inverse de l'intervalle.

L'inverse de la pente porte quelquefois le nom de *module;* il est égal à l'intervalle.

Quand une droite est définie par les projections cotées de deux de ses points, on détermine les points à cote ronde par l'une des deux méthodes exposées plus haut (42). On forme ainsi l'échelle de pente de la droite ; c'est ce qu'on appelle *graduer* la droite. Prenons par exemple la droite AB donnée par les projections cotées de deux de ses points A et B (*fig.* 58). Nous allons graduer la droite par le procédé graphique. Au point b nous menons la perpendiculaire à la droite ab sur laquelle nous prenons la longueur bb_1 égale à 7,85 — 3,15 c'est-à-dire 4,70. Nous prenons $bc = 4 - 3{,}15 = 0{,}85$ puis cd, de, ef, égaux chacun à un mètre. Par les points c, d, e, f, nous menons des parallèles à la droite ab, et par leurs points d'intersection avec la droite ab_1 des perpendiculaires à cette même droite. Nous obtenons les points à cote ronde g, h, k, l.

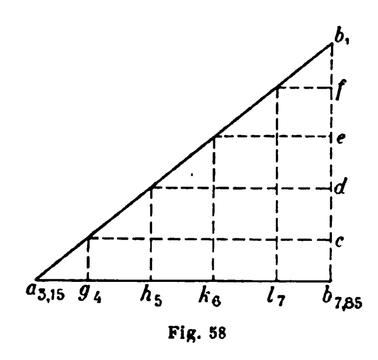


Fig. 58

Si l'on veut employer le procédé arithmétique, on déterminera d'abord le point g, puis on calculera l'intervalle qui est égal à $\frac{ab}{bb_1}$, car dans le triangle rectangle abb_1 on a

$$p = \operatorname{tg} bab_1 = \frac{bb_1}{ab}.$$

Par suite l'intervalle i, qui est l'inverse de la pente, sera donné par la formule

$$(3) \qquad i = \frac{d}{h},$$

en désignant par h la différence des cotes des deux points A et B, et par d la distance de leurs projections.

44. Angle d'une droite avec le plan de comparaison. — Soit α l'angle de la droite avec le plan de comparaison, p sa pente, i son

intervalle ; on a (43)

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{i}.$$

Si la droite est donnée par les projections cotées de deux de ses points (*fig.* 58), en désignant par h la différence de leurs cotes et par d la distance de leurs projections on a

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d}.$$

On peut encore employer le procédé graphique et mesurer sur la figure l'angle bab_1 qui n'est autre chose que l'angle cherché.

Application. — *Graduer une droite donnée par sa projection, sa pente, et un de ses points. On indique en outre le sens dans lequel les cotes vont en augmentant.*

Procédé arithmétique. — Soit mn la projection de la droite, a la projection du point qui a pour cote 2,75, et supposons la pente donnée égale à 0,45 (*fig.* 59). On suppose en outre que la droite monte dans le sens mn. Déterminons le point qui a pour cote 3. En appelant d la distance du point a à sa projection horizontale, la formule (3) nous donne

m $a_{2,75}$ b_3 4 5 n

Fig. 59

$$d = i \times (3 - 2,75).$$

Or

$$i = \frac{1}{0,75} = 1,33.$$

Par conséquent $\quad d = 1,33 \times 0,25 = 0,33.$

On prendra $ab = 0,33$ et le point b aura pour cote 3. Comme on connait l'intervalle, on en déduit les autres points à cote ronde et la droite est graduée.

Procédé graphique. — Si l'on veut employer le procédé graphique, il faut, connaissant la pente, construire l'intervalle. Soit mn la longueur de la pente donnée (*fig.* 60). Au point n on élève une perpendiculaire à la droite mn sur laquelle on prend la longueur np égale à l'unité, puis on mène la droite pq perpendiculaire à la droite mp. L'intervalle est la longueur nq, car le triangle rectangle mpq donne

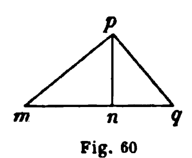


Fig. 60

$$mn \times nq = \overline{np}^2 = 1.$$

45. Distance de deux points. — Soient les deux points A et B donnés par leurs projections cotées (*fig.* 53). Par le procédé graphique il n'y a qu'à mesurer la longueur ab_1 à l'échelle du dessin.

Si l'on veut employer le calcul, on remarque que le triangle rectangle abb_1 nous donne

$$\overline{ab_1}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bb_1}^2,$$

et la longueur ab_1 est justement la distance des deux points dans l'espace. Donc, *en désignant par* δ *la distance des deux points donnés, par* h *la différence de leurs cotes et par* d *la distance de leurs projections horizontales*, on a la formule

$$(4) \qquad \delta = \sqrt{d^2 + h^2}.$$

Dans le cas actuel

$$\delta = \sqrt{\overline{4{,}35}^2 + \overline{2{,}5}^2} = 5{,}01.$$

La formule (4) peut encore se mettre sous la forme

$$(5) \qquad \delta = d\sqrt{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2} = d\sqrt{1 + \left(\frac{1}{i}\right)^2},$$

en vertu de la formule (3).

Application. — *Porter sur une droite une longueur donnée.*

Supposons une droite AB définie par les projections cotées de deux de ses points A et B (*fig.* 55), et proposons-nous de porter à partir du point A et du côté du point B une longueur égale à 4,4. Il n'y a qu'à porter sur A_1B_1 la longueur A_1C_1 égale à 4,4, on en déduit le point c à l'aide de la perpendiculaire C_1c à la droite ab.

Si l'on veut employer le procédé arithmétique, on calcule d'abord la distance AB par la formule (4) ; nous venons d'obtenir 5,01. Cela posé, la figure nous donne, en appelant c l'extrémité cherchée du segment,

$$\frac{ac}{ab} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ac}{4{,}35} = \frac{4{,}4}{5{,}01}.$$

On en tire

$$ac = 4{,}35 \times \frac{4{,}4}{5{,}01} = 3{,}82.$$

On porte la longueur ac sur la projection de la droite à partir du point a et du côté du point b.

46. Droites parallèles. — Deux droites parallèles faisant le même angle avec le plan de comparaison, leurs pentes sont égales, par suite leurs intervalles sont égaux ; en outre elles montent dans le même sens, donc :

Deux droites parallèles ont leurs projections parallèles (9) *et leurs intervalles égaux ; en outre leurs graduations sont de même sens.*

Application. — *Étant donnée une droite* AB, *mener par un point donné* C *une parallèle à la droite* AB.

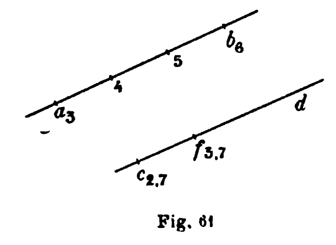


Fig. 61

Soient *ab* l'échelle de pente de la droite AB et *c* la projection cotée du point C dont la cote est 2,7 (*fig.* 61). Par le point *c* on mène la droite *cd* parallèle à la droite *ab* ; on prend la longueur *cf* égale à l'intervalle de la droite AB et on affecte le point *f* de la cote 3,7 .

47. Intersection de deux droites. — *Deux droites étant données par leurs projections cotées, reconnaître si elles se coupent, et, dans ce cas, déterminer leur point d'intersection.*

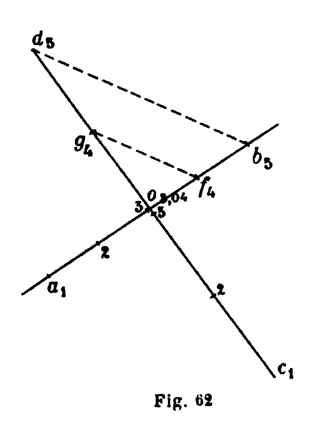


Fig. 62

Soient AB, CD les deux droites dont les projections *ab*, *cd* se coupent en un point *o* (*fig.* 62). On cherchera les cotes des points de chacune des deux droites qui se projettent au point *o*. Pour que les deux droites se coupent, il faut et il suffit que les deux cotes soient égales ; leur valeur commune est alors la cote de leur point d'intersection.

Remarque. — Si le point d'intersection des deux projections n'est pas dans les limites de l'épure et si l'on veut reconnaître si les deux droites sont dans le même plan sans avoir recours à une réduction d'échelle (15), on peut procéder de la manière suivante : on joint deux couples de points de même cote, par exemple *b*, *d* et *f*, *g*. Si les deux

droites données sont dans le même plan, les deux droites bd, fg sont parallèles comme projections d'horizontales parallèles (46). La condition est d'ailleurs suffisante, car si les deux droites bd et fg sont parallèles, les horizontales dont elles sont les projections le sont aussi ; elles déterminent un plan dans lequel chacune des deux droites données a deux points et par suite se trouve tout entière.

On peut encore dans ce cas établir une formule permettant de calculer la cote ω du point d'intersection des deux droites. Posons $5 - \omega = \delta$. On a

$$\frac{of}{ob} = \frac{4 - \omega}{5 - \omega} = \frac{\delta - 1}{\delta};$$

mais

$$\frac{of}{ob} = \frac{fg}{bd};$$

donc

$$\frac{\delta - 1}{\delta} = \frac{fg}{bd}.$$

On mesure les longueurs de bd et de fg et l'on tire δ de cette formule.

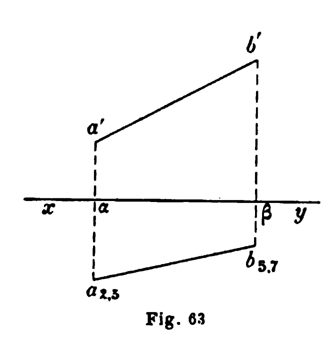


Fig. 63

48. Introduction d'un plan vertical. — *Une droite* AB *étant donnée par sa projection cotée* ab*, construire sa projection verticale dans un système déterminé par la ligne de terre* xy (*fig.* 63).

On mènera les lignes de rappel des points a et b et on prendra la cote $\alpha a'$ égale à 2,3 et la cote $\beta b'$ égale à 5,7. La droite $a'b'$ sera la projection verticale demandée.

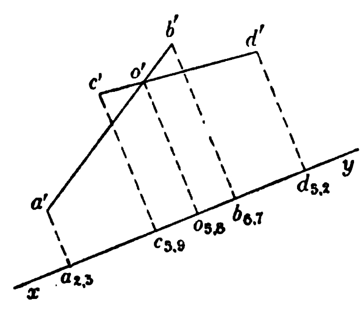


Fig. 64

Application. — *Déterminer le point d'intersection de deux droites données par leurs projections cotées et qui sont dans un même plan vertical.*

Soient les deux droites AB et CD données par leurs projections cotées ab, cd (*fig.* 64), qui sont nécessairement confondues puisque les deux droites ont le même plan

projetant. Prenons comme plan vertical celui qui contient les deux droites. La ligne de terre est la projection horizontale commune des deux droites et le point d'intersection des deux projections verticales de ces deux droites est le point o' qui est la projection verticale du point cherché. On en déduit sa projection horizontale o et sa cote qui est égale à oo'.

Remarque. — L'introduction d'un plan vertical revient à effectuer un rabattement sur le plan horizontal d'une projection verticale de la figure (2). Dans l'application précédente, la figure étudiée étant dans un plan vertical, l'opération que nous avons faite revient au rabattement de la figure elle-même sur le plan horizontal (33).

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DU PLAN. INTERSECTION DE DEUX PLANS. INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

I. — Représentation du plan.

49. Nous avons vu (18) qu'un plan est complètement déterminé quand on connaît une de ses lignes de plus grande pente ; dans la méthode des projections cotées, c'est par une de ses lignes de plus grande pente P (*fig.* 65) qu'on représente un plan. Cette ligne de plus grande pente sur laquelle on marque les points à cote ronde s'appelle l'*échelle de pente* du plan. Pour la distinguer de tout autre droite on la représente par deux traits parallèles très voisins l'un de l'autre. Il est clair que toute droite parallèle à la droite P peut être prise pour échelle de pente du plan. La connaissance de l'échelle de pente d'un plan entraîne immédiatement celle des horizontales à cote ronde du plan (*fig.* 65), puisque les projections des horizontales du plan sont perpendiculaires à la projection de toute ligne de plus grande pente de ce plan (18). Si l'on connaît deux horizontales quelconques d'un plan, on en déduit aisément la projection d'une ligne de plus grande pente ; elle est perpendiculaire aux projections

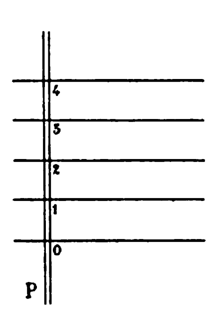


Fig. 65

des deux horizontales et les points où elle les rencontre ont pour cotes les cotes des horizontales ; la ligne de plus grande pente est donc déterminée par les projections cotées de deux de ces points. On en déduit l'échelle de pente du plan (43).

Dans les applications pratiques un plan qui est limité de toutes parts est représenté par la projection du polygone qui forme son contour. Chaque sommet est accompagné de sa cote. On représente en outre les horizontales sections du plan par des plans de niveau distants les uns des autres de l'unité de longueur ; on les limite aux côtés du polygone qui forme le contour du plan (*fig.* 66). On construit aisément l'échelle de pente P du plan.

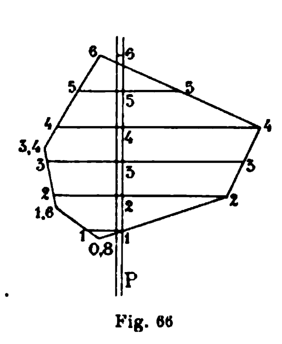


Fig. 66

Angle d'un plan avec le plan horizontal. — L'angle d'une ligne de plus grande pente d'un plan avec le plan horizontal est l'angle plan du dièdre formé par le plan et le plan horizontal (18). On obtiendra donc l'angle d'un plan avec le plan horizontal en construisant l'angle de son échelle de pente avec le plan horizontal (44).

On appelle *pente* d'un plan la pente de son échelle de pente ; c'est par conséquent la tangente trigonométrique de l'angle du plan avec le plan horizontal.

On appelle *intervalle* d'un plan l'intervalle de son échelle de pente.

50. Problème I. — *Faire passer un plan : 1° par deux droites qui se coupent ; 2° par deux droites parallèles ; 3° par une droite et un point ; 4° par trois points.*

Pour les deux premiers cas il n'y a qu'à joindre deux couples de points de mêmes cotes sur les deux droites. On obtiendra ainsi deux horizontales du plan des deux droites.

Le troisième cas se ramène au quatrième en choisissant arbitrairement deux points de la droite donnée.

Proposons-nous donc de construire l'échelle de pente d'un plan déterminé par trois points non en ligne droite.

Soient les trois points A, B, C, donnés par leurs projections cotées

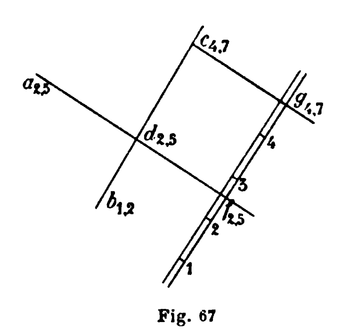


Fig. 67

a, *b*, *c* (*fig.* 67). Menons la droite *bc* et déterminons sur cette droite le point *d* qui a pour cote 2,5 comme le point *a* (42). La droite *ad* sera l'horizontale de cote 2,5 du plan déterminé par les trois points. La droite *cg* parallèle à la droite *ad* menée par le point *c* sera l'horizontale de cote 4,7 du plan. La droite *gf* sera l'échelle de pente du plan.

51. Problème II. — *On donne un plan* P *et la projection horizontale a d'un point* A *de ce plan ; trouver la cote de ce point* (*fig.* 68).

Par le point *a* nous mènerons la droite *ab* perpendiculaire à l'échelle de pente P du plan, nous déterminerons la cote du point *b* sur la droite P ; le nombre obtenu sera la cote de l'horizontale du plan qui se projette suivant la droite *ab* et par suite la cote du point A. Dans l'exemple choisi, nous trouvons 2,4.

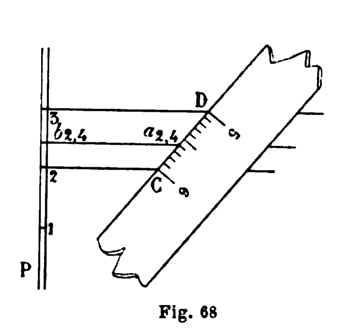


Fig. 68

Remarque. — Si l'échelle de pente du plan n'est pas tracée, on peut appliquer sur le point *a* une règle CD divisée en millimètres en la plaçant de telle sorte que deux des divisions successives qui marquent sur la règle les centimètres soient situées sur les deux horizontales à cote ronde qui comprennent le point *a*. Le nombre de millimètres qu'on compte à partir de l'horizontale inférieure jusqu'au point *a* sera le nombre de dixièmes d'unité qu'il faudra ajouter à la cote de cette horizontale pour avoir la cote du point du plan projeté au point *a*.

52. Problème III. — 1° *Mener par une droite un plan parallèle à une droite donnée ;* 2° *Reconnaître si une droite est parallèle à un plan donné.*

1° Nous avons indiqué dans la première partie (21) la solution de ce problème.

2° Soient le plan P et la droite AB donnée par sa projection cotée *ab* (*fig.* 69).

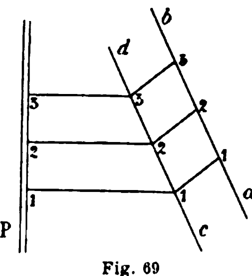


Fig. 69

On construit une droite CD située dans le plan P et dont la projection *cd* soit parallèle à la droite *ab*. La droite AB sera parallèle au plan si elle est parallèle à la droite CD. Si l'on est dans ce cas, les intervalles des deux droites doivent être égaux, et par suite les droites qui joignent les points de mêmes cotes des droites AB et CD doivent être parallèles. C'est ce qui a lieu sur la figure et la droite AB est parallèle au plan P.

53. Plans parallèles. — Théorème. — *Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que leurs lignes de plus grande pente soient parallèles.*

1° *La condition est nécessaire*, car deux plans parallèles ont leurs horizontales parallèles comme intersections de deux plans parallèles par une série de plans parallèles ; par suite leurs lignes de plus grande pente sont situées dans deux plans qui sont parallèles comme étant perpendiculaires à une même direction, et elles sont perpendiculaires à la direction des horizontales des deux plans, direction qui est elle-même parallèle aux deux plans. Donc les lignes de plus grande pente des deux plans sont parallèles (*).

2° *La condition est suffisante*, car, si deux plans ont leurs lignes de plus grande pente parallèles, leurs horizontales ont leurs projections parallèles et par suite sont elles-mêmes parallèles. Donc les deux plans sont parallèles comme contenant deux couples de droites parallèles, les horizontales et les lignes de plus grande pente.

Application. — *Mener par un point donné un plan parallèle à un plan donné.*

La droite parallèle à l'échelle de pente du plan donné menée par le point donné (46) sera l'échelle de pente du plan demandé.

54. Introduction d'un plan vertical. — *Un plan étant donné par son échelle de pente ab* (*fig.* 70), *construire ses traces dans le sys-*

(*) Deux droites situées dans deux plans parallèles sont parallèles quand elles sont perpendiculaires à une même direction parallèle aux deux plans.

tème de deux plans de projection déterminé par la ligne de terre xy.

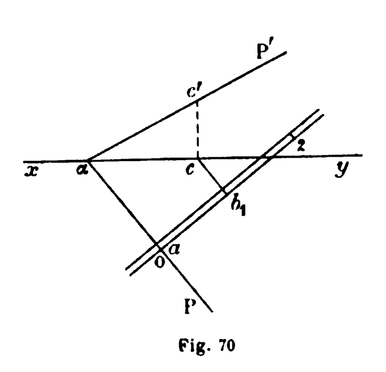


Fig. 70

La trace horizontale du plan est l'horizontale de cote zéro αP.

Pour avoir un point de sa trace verticale, nous construirons la projection verticale c' d'un point C du plan qui se projette horizontalement sur la ligne de terre xy au point de rencontre de cette droite avec l'horizontale du plan cotée **1**, par exemple.

La trace verticale du plan est la droite $\alpha c'$.

Si inversement, étant donné le plan PαP' par ses traces dans le système xy, on veut construire son échelle de pente, on déterminera le point (c, c') de la trace verticale qui a pour cote 1 $(cc' = 1)$.

La parallèle à la droite αP menée par le point c sera l'horizontale du plan de cote 1. Comme on connait l'horizontale de cote zéro qui est la droite αP, on aura facilement l'échelle de pente du plan.

II. — Intersection de deux plans.

55. Soient les deux plans P et Q donnés par leurs échelles de pente (*fig.* 71). La méthode a été indiquée antérieurement (23); on coupe les deux plans par deux plans auxiliaires horizontaux. Nous prendrons comme premier plan auxiliaire le plan horizontal de cote 4; il coupe les plans P et Q suivant les deux horizontales ab et cd dont le point d'intersection m de cote 4 est un point de l'intersection des deux plans P et Q. Le plan horizontal de cote 7 nous donne un second point p de

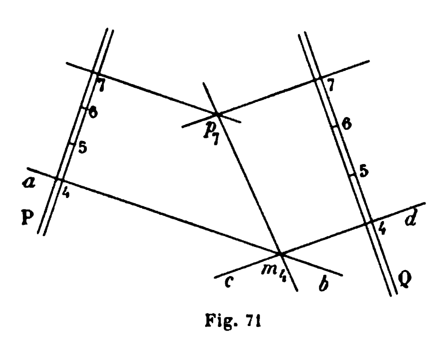


Fig. 71

cote 7 de l'intersection des deux plans. Cette intersection est la droite MP qui a pour projection cotée la droite mp.

Application. — *Construire l'intersection d'un plan donné par son échelle de pente* P *avec un plan vertical donné par sa trace horizontale* ab (*fig.* 72).

Fig. 72

En employant comme plans auxiliaires le plan horizontal de cote 2 et le plan horizontal de cote 6, nous obtenons pour déterminer l'intersection des deux plans les deux points c de cote 2 et d de cote 6.

Cas où les échelles de pente des deux plans sont parallèles. — Dans ce cas les horizontales des deux plans sont parallèles et la construction précédente ne réussit plus. Les deux plans sont parallèles à une même direction, celle de leurs horizontales, et par conséquent l'intersection des deux plans est elle-même parallèle à ces horizontales. La projection de l'intersection des deux plans est donc parallèle aux projections de leurs horizontales. Il suffit alors d'en déterminer un point. On peut pour l'obtenir couper les deux plans par un plan auxiliaire arbitraire. La construction suivante est un peu plus simple.

Soient P et Q les échelles de pente des deux plans (*fig.* 73). Joignons le point a coté 2 de l'échelle de pente P au point b coté 2 de l'échelle de pente Q. Joignons de même les deux points c et d de même cote 5 sur les deux échelles de pente. Par le point m d'intersection des deux droites ab et cd menons la droite fg perpendiculaire aux droites P et Q. Je dis que le point F du plan P a même cote que le point G du plan Q.

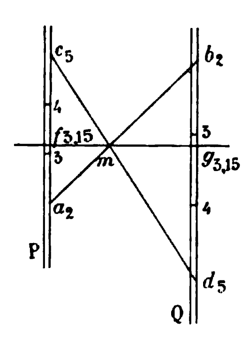


Fig. 73

En effet, les parallèles ac et bd coupées par les droites concourantes ab, fg, cd, donnent

$$\frac{af}{fc} = \frac{bg}{gd},$$

et comme la différence des cotes des points A et C est égale à celle

des points B et D, les points F et G ont même cote. Dans le cas actuel cette cote est 3,15. L'horizontale FG de cote 3,15 est donc la droite commune aux deux plans.

III. — Intersection d'une droite et d'un plan.

56. Soit à trouver le point d'intersection de la droite AB donnée par son échelle de pente *ab* et du plan P (*fig.* 74). Nous couperons le plan P par un plan Q passant par la droite AB (25) que nous déterminerons en menant par deux points *c* et *d* de la droite *ab* deux parallèles quelconques *cf*, *dg* qui seront considérées comme les projections des deux horizontales de cotes 3 et 6 du plan Q. Nous construirons l'intersection *fg* de ce plan auxiliaire avec le plan P (55) et le point *m* où cette droite coupe *ab* sera la projection du point demandé; comme il appartient à la droite AB on déterminera aisément sa cote (42).

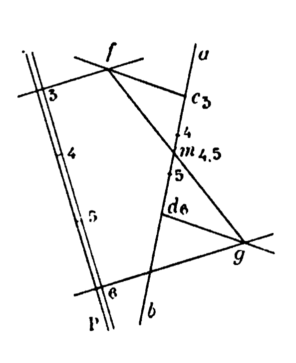


Fig. 74

APPLICATIONS

I. — **Problème.** — *On donne une verticale par sa projection horizontale a, un point* M *par sa projection cotée m et une droite* BC *déterminée de la façon suivante : sa projection horizontale est la droite bc, elle passe par le point* B *dont la projection est le point b et la cote* 2, *elle fait un angle de* 50 *degrés avec le plan de comparaison et elle s'éloigne de ce plan dans la direction bc. Mener par le point* M *une droite qui rencontre la verticale et la droite* BC (*fig.* 75).

La droite demandée est l'intersection du plan déterminé par la verticale *a* et le point M et du plan déterminé par la droite BC et le point M.

Nous commençons par construire la projection cotée de la droite BC.

Pour cela nous faisons l'angle *cbe* égal à 50 degrés et nous déterminons le point F de la droite ayant pour cote la cote 4,5 du point M, en prenant *bd* égal à $4{,}5 - 2 = 2{,}5$. La droite MF est l'horizontale de cote 4,5 du plan déterminé par la droite BF et le point M. La droite BG est son horizontale de cote 2 et son échelle de pente est la droite GH. En cherchant la cote du point de ce plan qui se projette au point *a*, nous obtenons l'intersection de la verticale *a* avec ce plan; c'est le point *a* coté 3,15. La droite qui joint ce point au point M est la droite demandée. Elle coupe la droite BC au point P qui se projette en *p* et dont la cote est 6,35.

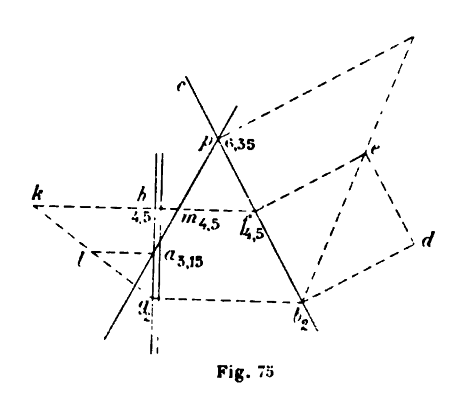


Fig. 75

II. — **Problème.** — *On donne une droite* AB *et une droite* CD *par leurs projections cotées. Mener une droite rencontrant les deux droites* AB, CD *et qui soit parallèle à la projection* ab *de la droite* AB (*fig.* 76).

La méthode consiste à mener un plan par la droite AB et la direction donnée *ab*, prendre l'intersection de ce plan avec la droite CD et, par le point obtenu, tracer une parallèle à la direction donnée.

Dans le cas actuel, le plan passant par les droites AB et *ab* est le plan projetant la droite AB. Prenons-le pour plan vertical; la ligne de terre *xy* sera la droite *ab*. Les projections verticales des deux droites sont *a'b'* et *c'd'*. Le point d'intersection de la droite CD avec le plan vertical est sa trace verticale (f, f'). Par ce point nous

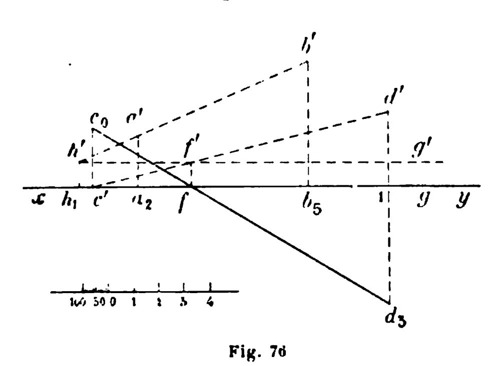


Fig. 76

menons une horizontale parallèle à la droite xy qui est la direction donnée. Cette horizontale FG de cote 1 est la droite demandée. Elle coupe la droite AB au point H coté 1.

EXERCICES

1. — On donne une droite dans le plan de comparaison. Construire l'échelle de pente d'un plan passant par cette droite et faisant un angle donné avec le plan de comparaison.

2. — On donne dans le plan de comparaison deux droites SA, SB, faisant un angle α. Construire : 1° un plan passant par la droite SA et faisant avec le plan de comparaison un angle donné ; 2° un plan passant par la droite SB et faisant avec le plan de comparaison un angle donné. — Construire la projection cotée de l'intersection de ces deux plans. (Le problème peut s'énoncer : construire un trièdre connaissant une face et les deux dièdres adjacents. Voir le chapitre suivant : exercice 3.)

CHAPITRE III

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES. RABATTEMENTS. DÉTERMINATION DES ANGLES.

I. — Droites et plans perpendiculaires.

57. Théorème. — *Toute droite perpendiculaire à un plan a sa projection parallèle à l'échelle de pente du plan, son intervalle est l'inverse de l'intervalle du plan, et les cotes augmentent en sens inverse sur la projection de la droite et sur l'échelle de pente du plan.*

En effet, nous avons vu qu'une perpendiculaire à un plan a sa projection horizontale perpendiculaire aux projections horizontales des horizontales du plan (27), elle est par suite parallèle à l'échelle de pente du plan. En second lieu une perpendiculaire à un plan et une ligne de plus grande pente du plan font avec le plan horizontal des angles complémentaires, donc leurs pentes qui sont les tangentes de ces angles, et par suite leurs intervalles, sont inverses l'un de l'autre. Enfin il est évident que les graduations d'une ligne de plus grande pente d'un plan et d'une perpendiculaire au plan sont de sens contraire.

58. Problème I. — *Mener par un point une perpendiculaire à un plan ; trouver la distance du point au plan.*

Soit P le plan donné. Proposons-nous de mener une perpendicu-

laire au plan P par le point A dont la projection est le point a et la cote 5,2 (*fig.* 77). La projection de la perpendiculaire est la parallèle à la droite bc menée par le point a (57). Son intervalle est l'inverse de l'intervalle du plan P; on peut mesurer ce dernier et calculer son inverse. On peut encore employer un procédé graphique en opérant de la manière suivante : on élève au point c la perpendiculaire cd à la droite bc, on prend la longueur cd égale à l'unité, on joint b et d et on trace la droite df perpendiculaire à la droite bd; la droite df coupe la droite bc au point f. La longueur cf est l'intervalle cherché car le triangle rectangle bdf donne

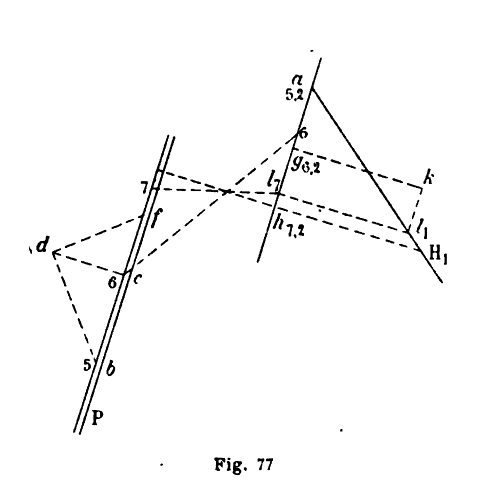


Fig. 77

$$bc \times cf = \overline{cd}^2 = 1.$$

Nous prendrons sur la parallèle à la droite bc menée par le point a la longueur ag égale à cf et nous affecterons le point g de la cote 6,2 (57). La droite AG est la perpendiculaire demandée.

Pour obtenir la distance du point A au plan P, nous construirons le point d'intersection H de la droite AG et du plan P. Nous prenons comme plan auxiliaire (56) le plan qui a la droite AG pour ligne de plus grande pente. Nous déterminons les points de cette échelle de pente qui ont pour cote 6 et 7. Le point l de cote 7 a été obtenu en rabattant la droite AG et en prenant $gk = 7 - 5,2 = 1,8$. Nous en avons déduit le point l_1 et le point l (42). La connaissance de l'intervalle de la droite AG nous permet de déterminer le point de cote 6. Nous déterminons l'intersection des deux plans en joignant les points de mêmes cotes 6 et 7 (55). Le point H qui a pour projection le point h et pour cote 7,2 est le point d'intersection de la droite AG et du plan P. La distance du point A au plan P est égale à la longueur aH_1, distance des deux points A et H (45).

59. Problème II. — *Mener par un point un plan perpendiculaire à une droite donnée. Trouver la distance du point à la droite.*

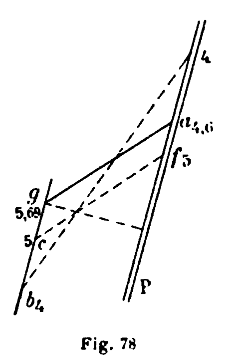


Fig. 78

Soient le point A de cote 4,6 et la droite BC (*fig.* 78). L'échelle de pente du plan cherché est la parallèle à la droite *bc* menée par le point *a*. L'intervalle de la droite BC est égal à 0,7 (échelle au $\frac{1}{100}$); celui du plan sera égal à 1,43. Connaissant l'intervalle de l'échelle de pente du plan nous déterminons la position du point *f* qui a pour cote 5 (44, application). L'échelle de pente du plan P est alors graduée. Pour trouver la distance du point à la droite nous déterminons le point d'intersection de la droite et du plan; sa projection est le point *g* et sa cote est 5,69. La perpendiculaire menée par le point A à la droite BC est la droite AG. Enfin nous déterminons la distance AG qui est égale à 2,32.

60. Problème III. — *Construire la perpendiculaire commune à deux droites et déterminer leur plus courte distance.*

Soient deux droites données par leurs échelles de pente *ab*, *cd* (*fig.* 79). Nous déterminons d'abord un plan P parallèle aux deux droites (30). Pour cela, nous menons par le point *a* la parallèle *af* à la droite *cd*. La droite *bf* est la projection de l'horizontale de cote 1 du plan P dont l'échelle de pente est la droite *ag*. Nous construisons ensuite la droite GH perpendiculaire au plan P. Il reste à mener une parallèle à la droite GH rencontrant les deux droites AB et CD (30). Par le point A nous traçons la droite AK parallèle à la droite GH; les deux droites AB, AK

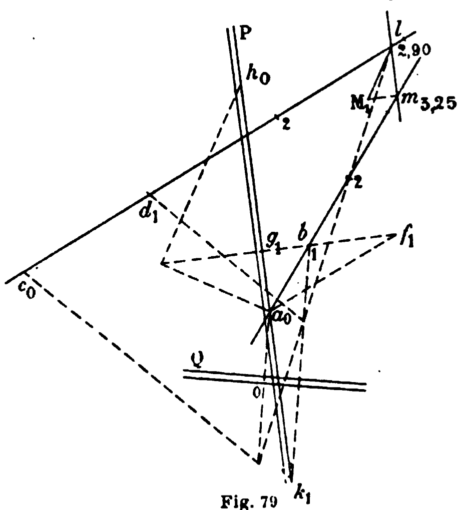


Fig. 79

déterminent un plan Q dont nous construisons le point d'intersection L avec la droite CD. Enfin par le point L nous menons la parallèle LM à la droite GH ; c'est la perpendiculaire commune aux deux droites AB, CD. Comme vérification, elle doit rencontrer la droite AB au point M.

La distance lM_1 des deux points L et M est la plus courte distance des deux droites.

Cas particulier. — *L'une des deux droites données est verticale.*

Supposons qu'il s'agisse de construire la perpendiculaire commune à la verticale *a* et à la droite dont on donne l'échelle de pente *bc* (*fig.* 80). La perpendiculaire commune aux deux droites est horizontale puisqu'elle est perpendiculaire à une verticale ; par conséquent l'angle droit qu'elle forme avec l'autre droite se projette suivant un angle droit. La projection horizontale de la perpendiculaire commune sera donc la perpendiculaire *ad* à la droite *bc* menée par le point *a* ; comme elle doit rencontrer la droite *bc* nous déterminerons la cote du point *d* sur cette droite, ce sera la cote de la perpendiculaire commune qui est par suite l'horizontale dont la projection est la droite *ad* et la cote 2, 45. La plus courte distance des deux droites sera égale à la longueur *ad* puisque la perpendiculaire commune est horizontale.

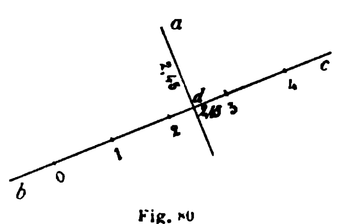


Fig. 80

APPLICATIONS

I. — *On donne une droite par son échelle de pente ab et la projection cd d'une autre droite* CD. *On donne en outre la projection fg de leur perpendiculaire commune. Graduer la perpendiculaire commune et la droite* CD (*fig.* 81). (N) (*).

(*) Les questions que nous faisons suivre de la mention (N) ont été posées aux examens oraux de l'École navale.

Nous déterminons d'abord sur la droite ab la cote du point projeté en f où elle rencontre la perpendiculaire commune ; c'est 5,33. La perpendiculaire commune est dans le plan perpendiculaire à la droite AB mené par le point f. L'intervalle fh de ce plan est égal à $1 : 1{,}2 = 0{,}83$ $\left(1{,}2\right.$ est l'intervalle de la droite AB, en supposant l'échelle au $\left.\frac{1}{100}\right)$. L'horizontale de cote 6,33 de ce plan est la droite hk $(fh = 0{,}83)$. Le point K de la perpendiculaire commune a pour cote 6,33 et l'on peut graduer cette droite dont on connaît deux points cotés F et K.

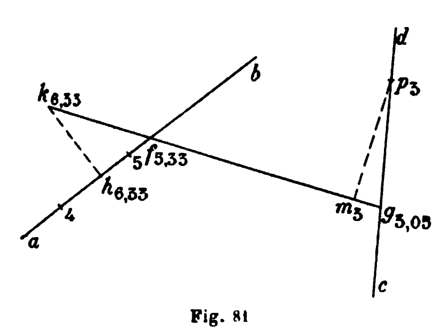


Fig. 81

Pour graduer la droite CD, déterminons d'abord la cote du point de la droite FK qui se projette au point g. Cette cote est 3,05. La droite CD est dans le plan perpendiculaire à la droite FK mené par le point G. L'intervalle gl de ce plan est égal à $1 : 1{,}4 = 0{,}71$. En prenant $gm = \frac{0{,}71}{2}$, on obtient l'horizontale mp qui a pour cote 3. Le point P de la droite CD a donc pour cote 3 et on peut la graduer. pg est la moitié de son intervalle.

II. — *Mener par une droite un plan perpendiculaire à un plan donné.*

La solution a été indiquée au paragraphe 28.

II. — Rabattements.

61. — Dans la méthode des projections cotées, le rabattement d'un plan est effectué autour d'une de ses horizontales. Tout ce que nous avons dit plus haut relativement à ce genre de rabattement trouve son application dans les questions qui, traitées par la méthode que nous exposons actuellement, exigent l'emploi de cette opération. Les constructions sont les mêmes, à cela près que l'on calcule les différences des cotes qui sont données par les nombres qui les mesurent au lieu de les construire sur la figure.

Rabattement d'un point. — Imaginons un plan donné par l'horizontale ab de cote 3,8 et un point C donné par sa projection c et sa cote 5,6 (*fig.* 82). Proposons-nous de le rabattre autour de l'horizontale ab et construisons le rabattement du point C. Il est sur la perpendiculaire cd à la charnière ab et à une distance de cette charnière égale à la distance du point C à l'horizontale dans l'espace (31). Pour construire cette distance, nous menons par le point c une parallèle à la droite ab sur laquelle nous prenons la longueur cf égale à la différence des cotes du point C et de l'horizontale : $5,6 - 3,8 = 1,8$. Le rabattement du point C sera le point C_1 tel que $dC_1 = df$.

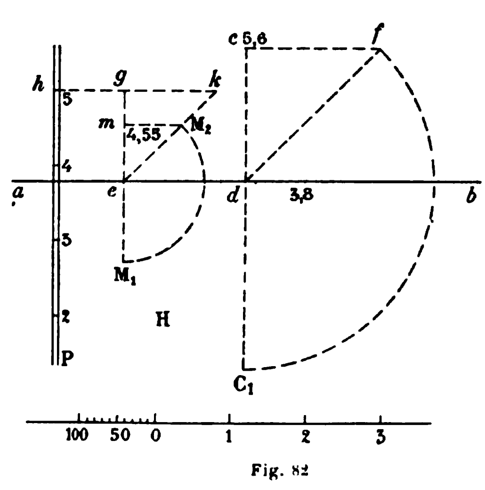


Fig. 82

Problème inverse. — Supposons qu'un plan P ait été rabattu autour de son horizontale ab de cote 3,8 (*fig.* 82), et soit M_1 le rabattement d'un point du plan ; on connait en outre le sens dans lequel le plan a été rabattu. Proposons-nous de trouver la projection et la cote du point du plan dont le rabattement est le point M_1. D'abord sa projection sera sur la perpendiculaire eM_1 menée à la charnière ab par le point M_1. Rabattons le plan vertical eM_1 autour de son horizontale de cote 3,8. Le point projeté en g de l'horizontale gh de cote 5 se rabat au point k ($gk = 5 - 3,8 = 1,2$). Le point cherché se rabat, dans ce rabattement du plan vertical eM_1, au point M_2, intersection de la droite ek et de la circonférence décrite du point e comme centre avec eM_1 comme rayon. Nous supposons qu'on ait rabattu les points dont la cote est supérieure à 3,8 sur la partie abH du plan de comparaison, de sorte qu'il faut choisir le point M_2 sur la droite ek du côté des cotes plus grandes que 3,8. La projection du point cherché sera le point m intersection de la droite eM_1 et de la droite mM_2 per-

pendiculaire à la droite eM_1. Quant à sa cote, elle est égale à $3{,}8 + mM_2 = 3{,}8 + 0{,}75 = 4{,}55$.

Quand on connaît déjà un point du plan et son rabattement; pour relever un autre point du plan, donné par son rabattement, on peut opérer comme nous l'avons indiqué plus haut (34).

Pour les autres questions relatives aux rabattements, nous renverrons le lecteur aux paragraphes 31 et suivants. Nous indiquerons seulement la construction suivante, qu'on a quelquefois intérêt à employer dans les applications de la méthode des projections cotées.

62. Rabattement de l'échelle de pente d'un plan. — Quand on a un certain nombre de points d'un plan à rabattre, on commence par rabattre l'échelle de pente du plan.

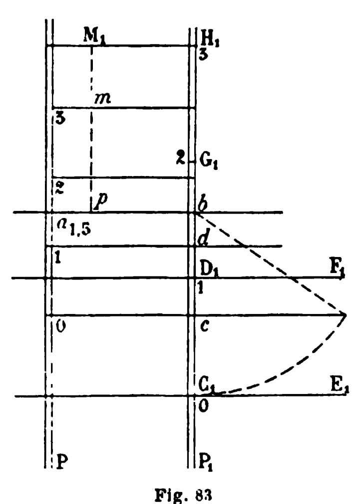


Fig. 83

Soit le plan P donné par son échelle de pente (*fig.* 83); supposons qu'on le rabatte autour d'une horizontale *ab* ayant pour cote 1,5. Proposons-nous par exemple de rabattre l'échelle de pente qui se projetterait suivant la droite *cd*. Le point *b* qui est sur la charnière se confond avec son rabattement.

Construisons le rabattement du point *c*, par exemple, qui a pour cote zéro. Il se rabat au point C_1 et l'horizontale de cote zéro se rabat suivant la parallèle C_1E_1 aux horizontales du plan, car, pendant la rotation du plan, ses horizontales ne changent pas de direction. L'horizontale de cote 1 se rabat suivant la droite D_1F_1 obtenue en rabattant le point *d* dont la cote est égale à 1. En prenant ensuite la longueur D_1G_1 égale à C_1D_1, nous aurons le rabattement du point de l'échelle de pente *cd* qui a pour cote 2, et ainsi de suite. La droite P_1 est le rabattement d'une échelle de pente du plan.

Cela posé, soit *m* un point du plan P; la cote de l'horizontale qui passe par le point *m* est égale à 3. Son rabattement sera le point M_1, intersection de l'horizontale de cote 3 rabattue avec la perpendiculaire *mp* abaissée du point *m* sur la charnière *ab*.

III. — Détermination des angles.

63. Problème I. — *Construire l'angle de deux droites.*

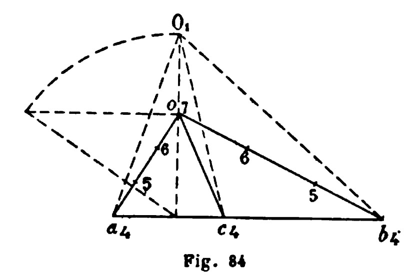


Fig. 84

La question a été déjà résolue (37). Sur la figure 84 nous avons construit l'angle aO_1b des deux droites OA, OB données par leurs projections cotées ainsi que la bissectrice OC de leur angle.

64. Problème II. — *Construire l'angle de deux plans.*

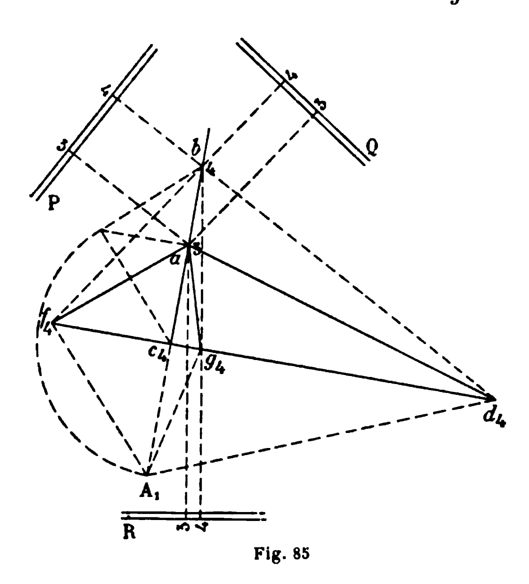


Fig. 85

Soient les deux plans P et Q (*fig.* 85). Nous déterminons d'abord leur intersection AB. Par le point A nous construisons un plan perpendiculaire à la droite AB; son échelle de pente est la droite *ac*. Son horizontale de cote 4 coupe les horizontales de même cote des plans P et Q aux points D et F, de sorte qu'il coupe les deux plans P et Q suivant les droites AD et AF. Il n'y a plus qu'à construire l'angle de ces deux droites en rabattant leur plan autour de son horizontale DF de cote 4 (63). On obtient l'angle dA_1f, qui est l'un des deux angles formés par les deux plans.

Construire le plan bissecteur du dièdre ayant pour faces les deux plans P et Q. — Nous traçons la bissectrice A_1g de l'angle dA_1f. Cette

droite se relève suivant la droite AG, le point G ayant pour cote 4. Le plan bissecteur est déterminé par les droites AB et AG. Son échelle de pente est la droite R.

65. Problème III. — *Déterminer l'angle d'une droite et d'un plan.*

La solution de ce problème a été indiquée au paragraphe 38.

66. Problème IV. — *Par un point d'un plan, tracer dans le plan une droite de pente donnée.*

La pente d'une droite étant égale à la tangente de l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal, le problème revient à mener par un point d'un plan une droite située dans ce plan et faisant un angle donné avec le plan horizontal.

On calculera d'abord l'intervalle de la droite, qui est l'inverse de la pente donnée. Soient P le plan donné par son échelle de pente et A un point de ce plan ayant pour projection le point a et pour cote 4 (*fig.* 86). Nous allons déterminer le point B de la droite qui a pour cote 3. Un premier lieu de la projection b de ce point est l'horizontale mn du plan P qui a pour cote 3 puisque la droite doit être dans ce plan.

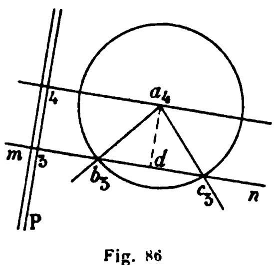


Fig. 86

Comme, en outre, nous connaissons l'intervalle de la droite et que le point B cherché doit avoir sa projection b à une distance du point a égale à cet intervalle, un second lieu du point b sera la circonférence décrite du point a comme centre avec l'intervalle de la droite comme rayon. Il n'y a plus qu'à prendre le point d'intersection de cette circonférence avec la droite mn, ce qui donne en général deux solutions b et c, et à le joindre au point a. Les deux droites AB et AC répondent à la question.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut que l'intervalle ab de la droite soit au moins égal à l'intervalle ad du plan, qui est la distance du point a à la droite mn.

Appelons α l'angle de la droite avec le plan horizontal et β l'angle du plan P avec ce même plan. On a

$$ab = \cotg \alpha, \qquad ad = \cotg \beta.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\cot g\, \alpha \geqslant \cot g\, \beta.$$

Comme les angles varient en sens inverse de leurs cotangentes, il faut que l'angle α soit au plus égal à l'angle β, ce qu'on pouvait prévoir puisque l'angle β est le plus grand angle que puisse faire avec le plan horizontal une droite située dans le plan P.

67. Problème V. — *Par une droite faire passer un plan de pente donnée.*

Ce problème est le même que celui qui consiste à mener par une droite un plan faisant avec le plan horizontal un angle donné, puisque la pente du plan est la tangente de cet angle.

On commencera par calculer l'intervalle du plan, qui est l'inverse de la pente donnée. Soit AB la droite donnée par son échelle de pente *ab* (*fig.* 87). Proposons-nous de construire l'échelle de pente du plan qui passe par le point A de la droite ayant pour cote 3.

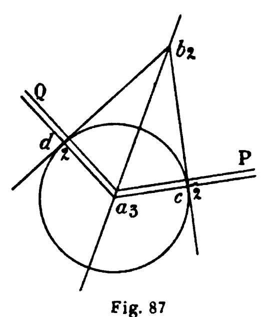


Fig. 87

L'horizontale de cote 2 du plan doit être à une distance du point *a* égale à l'intervalle de ce plan, elle est donc tangente à la circonférence décrite du point *a* comme centre avec cet intervalle comme rayon. En outre, le plan devant contenir la droite donnée, son horizontale de cote 2 devra passer par le point *b*. Il n'y aura donc qu'à mener par le point *b* une tangente à la circonférence tracée précédemment, ce sera l'horizontale de cote 2 du plan cherché. L'horizontale de cote 3 du plan sera parallèle à cette droite, et passera par le point *a*. Il y a en général deux plans répondant à la question ; leurs échelles de pente sont les droites P et Q.

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut que l'intervalle *ac* du plan soit au plus égal à l'intervalle *ab* de la droite, sans quoi on ne pourrait pas tracer la tangente à la circonférence passant par le point *b*. On verra comme dans le problème précédent que cela signifie que l'angle du plan avec le plan horizontal doit être plus grand que l'angle de la droite donnée avec ce même plan.

Remarques. — 1° Si la pente du plan que l'on doit construire est grande, on est amené à tracer une circonférence dont le rayon est petit. Si elle a un rayon trop restreint, on peut la remplacer par une autre ayant même centre et un rayon n fois plus grand ; on mènera la tangente par le point de la droite donnée qui a pour cote $3-n$ et on obtiendra l'horizontale du plan cherché qui a pour cote $3-n$.

2° Si la droite donnée est horizontale, l'échelle de pente du plan cherché lui est perpendiculaire ; il n'y aura donc qu'à porter sur une perpendiculaire à la droite donnée une longueur égale à l'inverse de la pente donnée pour avoir le point de l'échelle de pente du plan cherché dont la cote diffère d'une unité de celle de l'horizontale donnée.

68. Application. — *Étudier la projection d'une circonférence.*

Les projections d'une même figure sur des plans parallèles étant identiques, nous pouvons, pour étudier la courbe projection d'une circonférence, prendre comme plan de comparaison le plan horizontal qui passe par son centre.

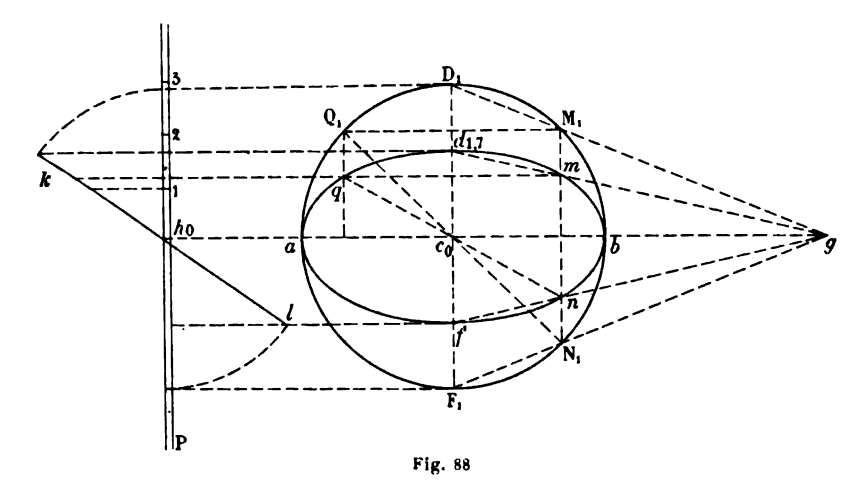


Fig. 88

Soient P le plan de la circonférence, c son centre sur l'horizontale de cote zéro et r la longueur de son rayon (*fig.* 88). Rabattons le plan P sur le plan de comparaison ; la circonférence se rabat suivant une circonférence ayant le point c pour centre et la longueur r pour rayon. En relevant cette circonférence rabattue, nous obtiendrons la courbe

projection de la circonférence de l'espace. Les points a et b qui sont sur la charnière sont deux points de la courbe. Relevons le point rabattu au point D_1 situé sur le diamètre perpendiculaire au diamètre ab ; nous obtenons le point d (sa cote est 1,7) (34). De même le point F_1 se relève au point f. Pour relever maintenant un point quelconque M_1 nous tracerons la droite D_1M_1, nous prendrons son point d'intersection g avec la charnière, puis nous joindrons le point g au point d ; le point m sera la projection du point de la circonférence qui était rabattu au point M_1 (34).

Nous pouvons par ce procédé construire autant de points que nous voudrons de la courbe que nous étudions ; en les prenant suffisamment rapprochés et les unissant par un trait continu, nous aurons la forme de la courbe $adbf$. Cette courbe porte le nom d'*ellipse*.

Remarque. — Quand le point M_1 qu'on veut relever est tel que la droite D_1M_1 coupe la droite ab hors des limites du dessin, on peut se servir, pour relever le point M_1, des points F_1 et f, ou de tout autre point de la circonférence rabattue qui aurait déjà été relevé, en se souvenant qu'une droite et son rabattement coupent toujours la charnière au même point (34).

Centre, axes de symétrie. — Un diamètre quelconque N_1P_1 de la circonférence se relève suivant une corde np de la courbe qui passe par le point c et qui est partagée par ce point en deux parties égales. Les points de la courbe sont donc symétriques deux à deux par rapport au point c qui porte le nom de *centre. Il est la projection du centre de la circonférence.*

La droite ab est un axe de symétrie, car si nous relevons le point N_1 symétrique du point M_1 par rapport à cette droite, la construction nous donne le point n symétrique du point m par rapport à la droite ab. On l'appelle le *grand axe*.

La droite df est un second axe de symétrie, car les points M_1 et Q_1 qui sont sur une même horizontale rabattue se relèvent aux points m et q situés sur une même horizontale et symétriques par rapport à la droite cd, qui se nomme le *petit axe*.

La courbe a donc deux axes de symétrie rectangulaires. On les construit de la manière suivante :

Le grand axe est la projection du diamètre horizontal du cercle.

Il est égal au diamètre du cercle et c'est le plus grand des diamètres de la courbe puisque tous les autres diamètres de la circonférence font un certain angle avec le plan de comparaison et par suite se projettent suivant une longueur plus petite que celle du diamètre de la circonférence.

Le petit axe est la projection du diamètre dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan ; c'est le plus petit des diamètres de la courbe puisqu'il est la projection de celui des diamètres de la circonférence qui fait le plus grand angle avec le plan de projection.

On le construit en rabattant l'échelle de pente du plan suivant la droite kl, prenant hk et hl égaux chacun au rayon de la circonférence et menant les perpendiculaires kd et lf à l'axe df.

Connaissant les deux axes *ab* et *df* de la courbe en position et en grandeur, on la construit par points en traçant la circonférence aD_1bF_1 décrite sur le grand axe comme diamètre et en opérant comme nous l'avons expliqué plus haut pour déterminer le point *m*.

Remarque. — La courbe que nous venons d'étudier jouit d'une propriété métrique qui lui sert de définition en géométrie élémentaire et que nous allons établir.

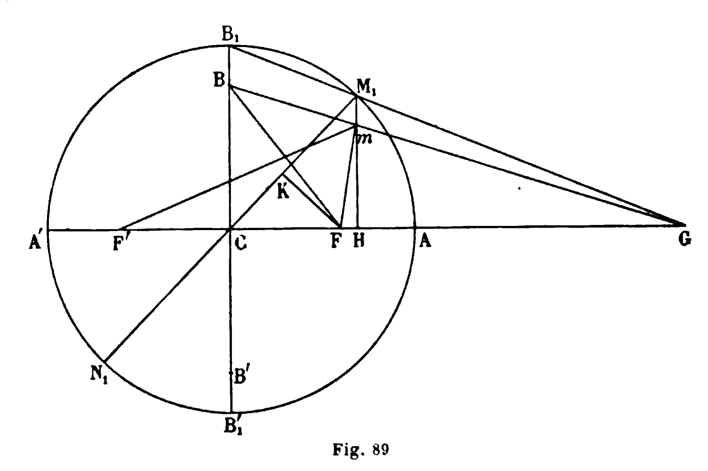


Fig. 89

Il existe sur le grand axe deux points fixes appelés foyers tels que la somme des distances de chaque point de la courbe à ces deux points fixes est constante et égale à son grand axe.

Soit l'ellipse qui a pour axes les deux droites AA′ et BB′ (*fig.* 89).

Traçons la circonférence $AB_1A'B'_1$ sur AA' comme diamètre. Soit m un point de la courbe déduit du point M_1 comme nous l'avons indiqué précédemment. Du point B comme centre, avec le demi-grand axe comme rayon, décrivons une circonférence coupant le grand axe aux points F et F'. Nous allons démontrer qu'en menant les droites mF et mF' on a

$$mF + mF' = AA'.$$

Traçons le diamètre M_1N_1 et menons FK perpendiculaire à M_1N_1. Nous allons établir que mF est égal à KM_1 et mF' à KN_1. La somme sera alors M_1N_1, c'est-à-dire AA', et le théorème sera démontré.

Remarquons d'abord que les parallèles CBB_1, HmM_1, coupées par les droites concourantes GC, GB, GB_1 nous donnent

$$\frac{Hm}{HM_1} = \frac{CB}{CB_1} = \frac{CB}{CA},$$

d'où l'on tire

$$Hm = \frac{CB}{CA} \cdot HM_1.$$

Les droites antiparallèles FK, HM_1 donnent

$$CM_1 . CK = CH . CF,$$

et comme $CM_1 = CA$, on a

$$CK = \frac{CF}{CA} \cdot CH$$

et

$$KM_1 = CA - \frac{CF}{CA} \cdot CH.$$

D'autre part le triangle rectangle mFH donne

$$\overline{mF}^2 = \overline{FH}^2 + \overline{Hm}^2$$

ou

$$\overline{mF}^2 = (CH - CF)^2 + \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} \cdot \overline{HM_1}^2;$$

or

$$\overline{HM_1}^2 = \overline{CM_1}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$$

et

$$\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CF}^2,$$

car $BF = CA$; donc

$$\overline{mF}^2 = (CH - CF)^2 + \frac{\overline{CA}^2 - \overline{CF}^2}{\overline{CA}^2} (\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2),$$

ou, en effectuant et opérant les réductions,

$$\overline{mF}^2 = \overline{CA}^2 - 2CF \cdot CH + \frac{\overline{CF}^2}{\overline{CA}^2} \cdot \overline{CH}^2$$

ou enfin

$$\overline{mF}^2 = \left(CA - \frac{CF}{CA} \cdot CH\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$mF = KM_1.$$

On établirait de même que

$$mF' = KN_1,$$

et le théorème est démontré.

EXERCICES DU CHAPITRE III

1. — On trace sur un plan horizontal un triangle ABC, dont les côtés ont pour longueurs respectives : $AB = 55^{mm}$; $AC = 75^{mm}$; $BC = 65^{mm}$. Sur les verticales des points A, B et C, on porte $AD = 35^{mm}$; $BE = 60^{mm}$; $CF = 30^{mm}$, et on demande :

1° De déterminer l'angle du plan du triangle DEF avec le plan horizontal (on indiquera cet angle sur l'épure par un arc de cercle de 25^{mm} de rayon, décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés) ;

2° De construire, en reportant les données sur une autre partie de la feuille de dessin, la projection horizontale du cercle circonscrit au triangle DEF.

(On déterminera les axes de l'ellipse ainsi obtenue et on indiquera à l'encre les constructions qui fournissent l'un des points de cette courbe et la tangente en ce point.) (*Institut agronomique.*)

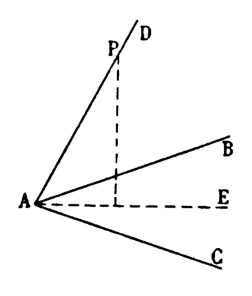
2. — On donne dans le plan de comparaison une droite SB. Mener par la droite SB un plan P faisant un angle donné avec le plan de comparaison. Construire dans le plan P une droite SA passant par le point S et faisant avec SB un angle donné C. (Après avoir construit l'échelle de pente du plan P, on tracera le rabattement de la droite SA sur le plan de compa-

raison autour de SB, puis on relèvera la droite SA en relevant un de ses points) (61, problème inverse).

3. — Construire un trièdre connaissant deux faces, *a*, *c*, et le dièdre compris B. (On placera la face *a* dans le plan de comparaison.) — Déterminer tous les éléments du trièdre (le dièdre A, le dièdre C, la face *b*).

4. — On donne une droite SB dans le plan de comparaison. Mener par SB un plan P faisant un angle donné avec le plan de comparaison. Dans le plan P on mène une droite SA passant par un point S de SB et faisant avec SB un angle donné *a*. Construire un plan passant par SA et faisant avec le plan de comparaison un angle donné (67).

On peut énoncer ce problème : construire un trièdre connaissant deux dièdres A et B et la face *a* opposée à l'un d'eux.



5. — On donne : une face BAC = *a* d'un angle trièdre ; l'angle EAC = *b* que fait avec la ligne AC la projection AE de l'arête AD sur le plan de la face BAC ; la distance AP = *c* d'un point P de cette arête au sommet A ; la distance du point P à la face BAC. Déterminer les deux autres faces de l'angle trièdre et les angles dièdres qu'elles font entre elles.

TROISIÈME PARTIE

REPRÉSENTATION DES POLYÈDRES ET DES SURFACES

CHAPITRE I

EXERCICES SUR LA REPRÉSENTATION DES POLYÈDRES SIMPLES. — SECTION PLANE DES POLYÈDRES

I. — Représentation des polyèdres.

69. Nous avons exposé jusqu'ici en quoi consistent les opérations fondamentales de la géométrie descriptive; qu'on emploie, pour la représentation des corps, deux plans de projection rectangulaires, ou la méthode des projections cotées. Dans les applications qui suivent nous supposerons en général les données de la question représentées par leurs projections cotées. Les données étant mises en place sur l'épure, on examinera quelle est la suite d'opérations à effectuer pour en déduire le résultat demandé et on les classera avec soin dans l'ordre où elles doivent être effectuées. On exécutera alors ces opérations successives en ayant soin, pendant l'exécution de chacune d'elles, de faire abstraction de toutes les autres ; on s'aidera d'ailleurs au besoin d'un certain nombre d'élévations en projetant la figure sur des plans verticaux choisis de manière à faciliter le travail. Enfin on représentera les résultats par un plan coté comme les données.

Avant d'aller plus loin nous allons donner quelques notions sur la ponctuation des épures, c'est-à-dire sur les différentes espèces de traits par lesquels on représente les diverses parties du dessin.

Les lignes qui ne font pas partie du système que l'on se propose de représenter doivent être tracées en traits discontinus très fins et d'égale longueur (---------). Ce sont en général les lignes introduites pour construire les diverses parties de la figure et on les appelle pour cette raison *lignes de construction*.

Pour représenter le système lui-même, il faut d'abord faire la distinction des parties vues et des parties cachées. La détermination des parties vues et des parties cachées dépend de la situation de l'observateur qui regarde le corps dans l'espace. On suppose cette situation différente suivant qu'il s'agit d'une projection horizontale ou d'une projection verticale.

Projection horizontale. — L'observateur est supposé au-dessus du plan horizontal, regardant ce plan, et assez éloigné de lui pour qu'on puisse considérer les rayons visuels comme parallèles et perpendiculaires au plan horizontal. Dans ces conditions, si plusieurs points du corps que l'on représente sont sur une même verticale, celui de ces points qui est le plus éloigné du plan horizontal, au-dessus de ce plan, est vu et cache tous les autres.

Projection verticale. — L'observateur est supposé en avant du plan vertical, regardant ce plan et assez éloigné de lui pour qu'on puisse considérer les rayons visuels comme parallèles et perpendiculaires au plan vertical. Dans ces conditions, si plusieurs points du corps que l'on représente sont sur une même ligne de bout, celui de ces points qui est le plus éloigné du plan vertical, en avant de ce plan, est vu et cache tous les autres.

On voit que, les deux observateurs étant différents, les parties vues et les parties cachées sont indépendantes dans les deux projections.

Les parties vues se représentent en trait plein (————) et les parties cachées par des lignes de petits points ronds très fins et très voisins les uns des autres (··········). Si une ligne est la projection à la fois d'une ligne vue et d'une ligne cachée, elle doit être naturellement figurée en trait plein. La largeur d'un trait plein doit être notablement plus grande que celle d'un trait discontinu.

Il peut arriver que certaines parties des figures qui sont combinées entre elles doivent être supposées ne pas exister dans la représentation du corps que l'on demande de construire ; ces parties se représentent

par un trait mixte composé alternativement de petits traits et de points ronds (-.-.-.-.-.-).

La largeur doit être la même pour tous les traits de même espèce dans les différentes parties de la figure.

Quand on représente une figure de l'espace par ses projections sur deux plans rectangulaires, la ligne de terre se fait en trait plein. S'il s'agit d'un plan coté, les projections verticales que l'on a pu être amené à introduire sont considérées comme des constructions auxiliaires et tout ce qui est relatif à ces projections est représenté en lignes de construction.

On emploie souvent l'encre rouge pour représenter les constructions nécessaires à l'exécution de l'épure ; dans ce cas toutes les lignes de construction se font à l'encre rouge en trait plein, tandis que les lignes qui composent la projection de la figure que l'on représente se font à l'encre noire en tenant compte des conventions précédemment indiquées.

Nous montrerons sur les exemples suivants comment on effectue la ponctuation d'une épure.

Nous donnerons d'abord quelques exemples de constructions de *tétraèdres*. C'est le plus simple des polyèdres, il est limité par quatre plans formant un solide compris sous quatre faces triangulaires.

70. I. — *Construire la projection cotée d'un tétraèdre déterminé par les plans* P, Q, R, S *de ses quatre faces, donnés par leurs échelles de pente* (*fig.* 90).

Nous construisons les arêtes du tétraèdre en déterminant les droites d'intersection des plans deux à deux (55). Nous avons employé comme plans auxiliaires les plans horizontaux de cotes 2 et 6, évitant de choisir des plans plus voisins l'un de l'autre qui nous auraient donné, pour chaque droite d'intersection, deux points trop rapprochés et par suite déterminant mal la droite correspondante. Par exemple l'intersection des deux plans P et Q est la droite AB déterminée par les deux points F et G, qui ont respectivement pour projections les deux points f et g, et pour cotes 2 et 6. Nous avons obtenu les cotes des deux sommets A et B en déterminant les cotes des horizontales AH et BK du plan Q qui passent par ces deux points (51). Nous avons finalement la projection cotée *abcd* du tétraèdre demandé.

Ponctuation. — Les faces du tétraèdre sont supposées opaques. Remarquons d'abord que la projection du solide que nous devons représenter est contenue à l'intérieur d'un contour fermé *abcd* ; les droites qui forment ce contour sont évidemment vues. Considérons par exemple le côté *ab* qui fait partie de ce contour. Si par un point de cette droite on mène une verticale, elle ne rencontre le tétraèdre dans

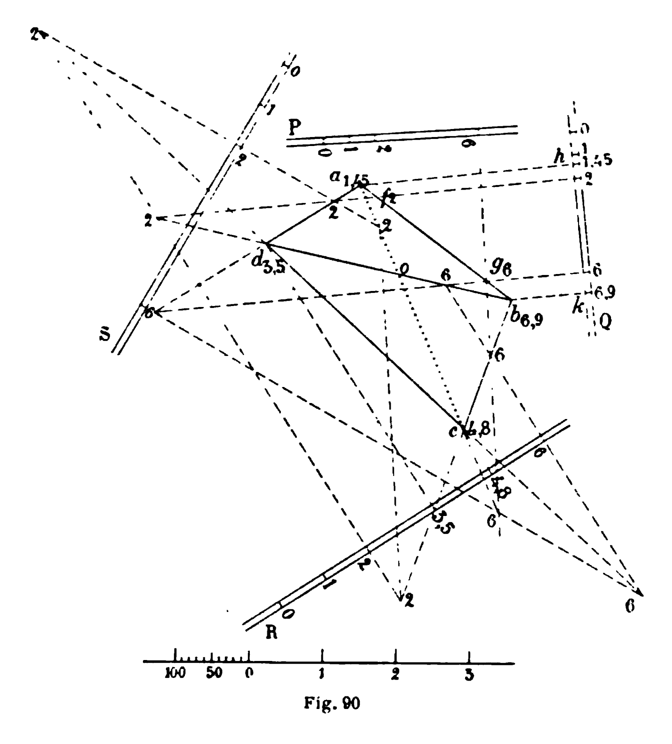


Fig. 90

l'espace qu'en un point situé sur le côté AB ; ce point est donc vu puisqu'il n'est caché par aucun autre point du tétraèdre. Toute verticale menée par un point du plan de comparaison situé à l'intérieur du contour *abcd* rencontre le tétraèdre en deux points dont le plus élevé cache l'autre ; l'intérieur du contour est la projection d'une part, des deux faces ABD, CBD adjacentes à l'arête BD, d'autre part, des deux faces ABC, ACD adjacentes à l'arête AC. Il s'agit de reconnaître lequel de ces deux groupes de deux faces cache l'autre ; cela revient à décider laquelle des deux arêtes AC, BD est cachée par la surface du tétraèdre. Pour y parvenir, nous considérons le point *o* où se croisent

les projections de ces deux arêtes, et nous déterminons la cote du point de l'arête AC qui se projette au point o et celle du point de l'arête BD qui se projette au même point. Nous trouvons pour la première 2,65 et pour la seconde 5,35. C'est donc le point de l'arête BD qui est le plus élevé ; par suite l'arête BD doit être représentée vue et l'arête AC cachée. Les deux faces ABD, BCD cachent les deux faces ABC, ACD.

71. Il peut se trouver parmi les données l'angle de deux faces du polyèdre ; si l'une de ces deux faces est construite, l'autre se trouve parmi les plans qui font un angle donné avec le plan de la première ; dans le cas où ce dernier plan est le plan de comparaison on pourra appliquer les constructions relatives à l'angle d'un plan avec le plan horizontal (18-67).

II. — *Construire un tétraèdre connaissant sa base abc donnée dans le plan de comparaison et les trois angles dièdres formés par la base avec les trois autres faces.*

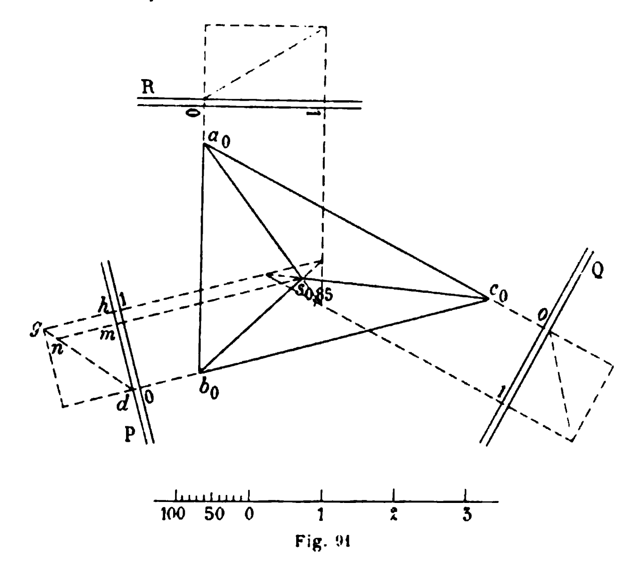


Fig. 91

Soient abc la base donnée dans le plan de comparaison (*fig.* 91), α l'angle plan du dièdre dont l'arête est bc, β celui du dièdre dont l'arête est ca, γ celui du dièdre dont l'arête est ab. Désignons par S le sommet du tétraèdre. Le plan de la face Sbc fait avec le plan hori-

zontal un angle α ; son échelle de pente P a sa projection perpendiculaire à sa trace horizontale *bc*. Par le point *d* où la droite P rencontre la droite *bc*, nous mènerons une droite *dg* faisant l'angle α avec la droite P, c'est le rabattement de l'échelle de pente du plan cherché sur le plan horizontal (49). Nous déterminons le point de cette échelle de pente qui a pour cote 1 (42). La droite *gh* est l'horizontale 1 du plan de la face S*bc*. Nous construisons d'une manière analogue les échelles de pente des plans des faces S*ca*, S*ab*. Il n'y a plus ensuite qu'à déterminer les droites d'intersection de ces trois plans deux à deux ; nous les obtenons en déterminant les points cotés 1 de ces droites (55). Ces trois droites se projettent suivant les droites *as*, *bs*, *cs* qui passent par le même point *s* projection du sommet S ; on calculera sa cote sur le plan S*bc* par exemple. On l'obtient suivant la longueur *mn* égale à 0,85.

Pour chacun des plans S*ab*, S*bc*, S*ca*, il y a deux solutions symétriques par rapport au plan de comparaison ; en combinant ces six plans trois à trois de manière qu'il y en ait toujours un appartenant à l'un des groupes de deux plans symétriques, on trouve qu'il y a huit tétraèdres répondant à la question, symétriques deux à deux par rapport au plan de comparaison.

Le sommet S du tétraèdre que nous avons choisi se projette à l'intérieur de la base ; par conséquent les trois faces S*ab*, S*bc*, S*ca* sont vues et cachent la base *abc*. Les trois arêtes S*a*, S*b*, S*c* sont vues.

72. Si le polyèdre que l'on propose de construire est symétrique par rapport à un plan vertical, on pourra introduire une élévation en prenant le plan de symétrie comme plan vertical de projection ; le polyèdre étant symétrique par rapport au plan vertical, sa projection verticale sera généralement simple et il sera souvent aisé d'en déduire la projection cotée.

III. — *Un tétraèdre* S*abc a sa base abc dans le plan de comparaison. On donne le sommet a et la projection cotée du sommet* S. *Le plan de la face* S*bc est perpendiculaire à l'arête* S*a et les dièdres ayant pour arêtes les droites ab et ac valent chacun* 68°. *Construire la projection cotée du tétraèdre.*

Soient *a* le sommet donné dans le plan de comparaison, *s* la projection du sommet S dont la cote est égale à 3,4 (*fig.* 92). Les deux dièdres S*abc*, S*acb* étant égaux, les plans des deux faces S*ab*, S*ac* sont

symétriques par rapport au plan projetant l'arête S*a* ; comme en outre le plan de la face S*bc* est perpendiculaire à l'arête S*a*, il est aussi perpendiculaire au plan projetant l'arête S*a* ; donc le tétraèdre est symétrique par rapport au plan projetant l'arête S*a* ; comme ce plan est vertical, nous le prendrons comme plan vertical de projection. La ligne de terre *xy* sera la droite *as* qui est la trace horizontale de ce plan. Nous construisons d'abord la projection verticale *s'a'* de l'arête S*a* en prenant la longueur *ss'* égale à 3,4.

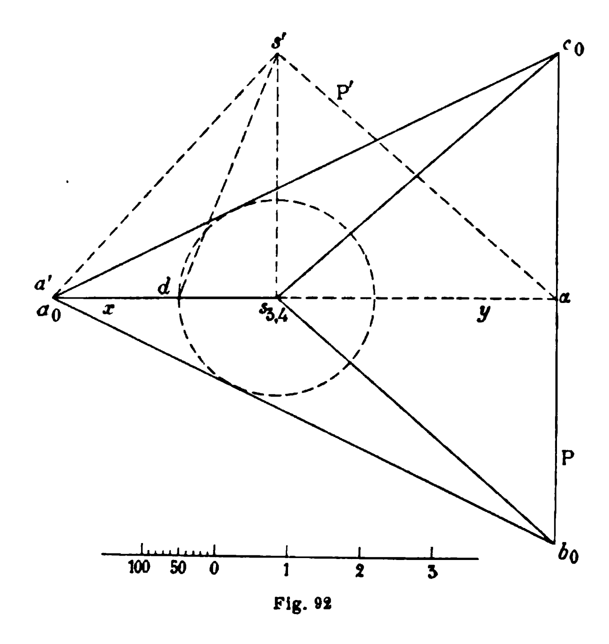


Fig. 92

L'arête S*a* étant connue, nous construirons d'abord le plan de la face S*bc* qui est perpendiculaire à cette arête. Ensuite nous construirons les plans des faces S*ab*, S*ac* qui passent par l'arête S*a* et font chacun avec le plan horizontal un angle de 68°. Enfin nous obtiendrons les arêtes S*b* et S*c* en construisant les droites d'intersection de ces deux plans avec le plan S*bc*. En résumé, nous avons trois opérations successives à effectuer.

Construction du plan S*bc*. — Sa trace verticale est perpendiculaire à la droite *a's'* et sa trace horizontale à la droite *sa* (27), c'est-à-dire à la ligne de terre; il est donc perpendiculaire au plan vertical, et

comme il contient le point (s, s'), sa trace verticale $\alpha P'$ passe par le point s'. Sa trace horizontale est la droite αP.

Construction des plans S*ab*, S*ac*. — La trace verticale commune de ces deux plans est la droite $a's'$ puisque chacun d'eux coupe le plan vertical suivant l'arête S*a*. Il s'agit donc de construire le plan S*ab* connaissant sa trace verticale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal. Nous nous appuierons sur la construction d'une ligne de plus grande pente du plan (18) (*fig.* 21). On voit sur cette figure que la trace horizontale αP du plan est à une distance du point *b* égale à *ab*, et cette longueur *ab* est le côté de l'angle droit du triangle rectangle bab'_1 dont l'autre côté est bb'_1 longueur égale à la cote du point (b, b') et dont l'angle aigu bab'_1 est égal à l'angle du plan $P\alpha P'$ avec le plan horizontal. La trace αP est donc tangente à la circonférence qui aurait pour centre le point *b* et pour rayon la longueur *ab*. Appliquons ces considérations au problème actuel (*fig.* 92). Nous construisons le triangle rectangle $ss'd$ dont le côté ss' est égal à la cote du point S et dont l'angle aigu sds' est égal à 68°, nous traçons la circonférence *sd* et du point *a* nous menons à cette circonférence la tangente *ab* qui est la trace horizontale du plan S*ab*. L'autre tangente *ac* est la trace horizontale du plan S*ac*.

Détermination des arêtes S*b* *et* S*c*. — L'intersection des deux plans S*ab*, $P\alpha P'$ est la droite S*b*, le point *b* étant le point d'intersection des deux traces horizontales. De même l'intersection des deux plans S*ac*, $P\alpha P'$ est la droite S*c*.

La projection cotée du tétraèdre est *sabc*.

Toutes les arêtes sont vues.

73. IV. — *On donne le point* A *par sa projection cotée et deux points* d *et* f *dans le plan de comparaison* (*fig.* 93). *Le point* A *est un sommet d'un tétraèdre* SABC ; *le plan de la face* ABC *passe par la droite* A*d* *et fait un angle de* 65° *avec le plan horizontal ; l'arête* SC *passe par le point* f, *elle est perpendiculaire au plan de la face* ABC, *sa longueur est de* 2ᵐ,20 *et le sommet* S *est par rapport au plan* ABC *dans la région opposée à celle qui contient le point* f ; *enfin l'arête* AB *est une ligne de plus grande pente du plan* ABC *et le sommet* B *est dans le plan de comparaison. Construire la projection cotée du tétraèdre* SABC.

La droite A*d* est connue ; nous construirons d'abord un plan pas-

sant par cette droite et faisant avec le plan horizontal un angle de 65°, ce sera le plan de la face ABC. Ensuite pour obtenir l'arête SC nous mènerons par le point f une perpendiculaire au plan ABC, nous déterminerons son intersection avec le plan ABC, ce sera le point C, et à partir du point C nous porterons sur cette droite dans le sens indiqué par l'énoncé une longueur égale à 2^m,20. Enfin le point B sera la trace de la ligne de plus grande pente du plan ABC passant par le point A.

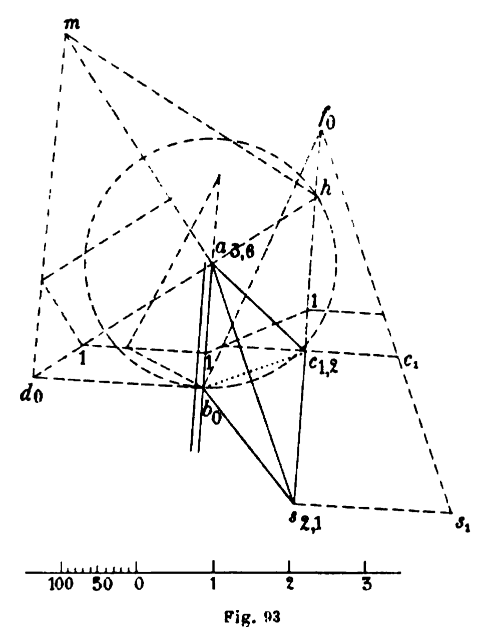


Fig. 93

Construction du plan ABC. — Nous déterminons d'abord le point de la droite Ad ayant pour cote 1 en rabattant le plan projetant cette droite (55) ; le point A se rabat en m, la longueur am étant égale à 3,6. Nous menons la droite mh faisant avec la droite ah l'angle ahm égal à 65°. La trace horizontale du plan ABC passe par le point d et est tangente à la circonférence qui a pour centre le point a et pour rayon la longueur ah (18). Nous choisissons l'une des deux solutions db. La droite ab est l'échelle de pente du plan ABC.

Construction de l'arête SC. — Nous construisons l'intervalle d'une perpendiculaire au plan ABC (58) et par le point f nous menons la droite fc perpendiculaire à ce plan.

Nous construisons son intersection C avec le plan ABC (55) ; elle a pour projection le point c et pour cote 1,2 ; puis nous déterminons sur la droite fC, de l'autre côté du point C par rapport au point f, le point S tel que la longueur CS soit égale à 2^m,20 ; il a pour projection s et pour cote 2,1.

Détermination du sommet B. — C'est la trace b de l'échelle de pente ab du plan ABC.

Il n'y a plus qu'à joindre les quatre sommets du tétraèdre S, A, B, C deux à deux par des lignes droites.

Ponctuation. — Les quatre côtés *ab*, *bs*, *sc*, *ca* qui limitent la projection du tétraèdre sont vus. Les faces se partagent en deux groupes ayant même projection : d'une part les faces SAB, SAC, de l'autre, les faces SBC, ABC. De ces deux groupes l'un cache l'autre. Pour décider quelles sont les faces vues, il suffit de reconnaître quelle est celle des deux arêtes AS, BC qui est vue. Il est manifeste que c'est l'arête AS puisque ses deux extrémités ont des cotes plus élevées que celles de l'arête BC.

74. Quelquefois les données permettent de déterminer le rabattement d'un sommet autour d'une horizontale connue ; ce point est alors sur une circonférence dont on connait : *le plan*, qui est vertical, passe par le rabattement du point, et est perpendiculaire à l'horizontale ; *le centre*, qui est sur l'horizontale, et *le rayon*. Une autre condition permet de déterminer complètement le sommet considéré. En particulier, un second rabattement connu de ce sommet achèvera de le déterminer.

V. — *Construire la projection cotée d'un tétraèdre dont la base abc est dans le plan horizontal, connaissant les longueurs des six arêtes.*

Nous commencerons par construire dans le plan horizontal le triangle *abc* dont nous connaissons les trois côtés (*fig.* 94). Soit S le quatrième sommet du tétraèdre. Nous supposerons les faces *ab*S, *bc*S rabattues sur le plan horizontal, la première autour de l'horizontale *ab*, suivant le triangle abS_1 dont les côtés aS_1 et bS_1 sont égaux aux deux arêtes données *a*S et *b*S, la seconde autour de

Fig. 94

l'horizontale *bc*, suivant le triangle bcS_2 dont les côtés bS_2, cS_2 sont égaux aux deux arêtes données *b*S, *c*S. Le point S se projettera à l'intersection *s* des perpendiculaires dS_1, fS_2, menées par les points S_1 et S_2 aux horizontales *ab* et *bc* (61). Pour avoir sa cote, il suffira, S_1 étant le rabattement du point S autour de l'horizontale *ab*, de mener la droite sS_3 perpendiculaire à la droite *sd* et de décrire du point *d* comme centre, avec dS_1 comme rayon, une circonférence qui coupe la droite sS_3 au point S_3. La cote du point S sera la longueur sS_3 ; elle est égale à 2,3. Il n'y a plus qu'à tirer les droites *sa*, *sb*, *sc*.

Toutes les arêtes du tétraèdre sont vues.

75. VI. — Construction d'un prisme. — *Un triangle abc donné dans le plan de comparaison est la base d'un prisme triangulaire abc*DFG. *L'arête* *a*D *située au-dessus du plan horizontal a une longueur donnée, elle fait avec l'arête ab un angle de* 30°. *Le plan de la face* D*ab*F *fait avec le plan horizontal un angle de* 60°. *Construire la projection cotée du prisme.*

Soit *abc* le triangle donné dans le plan de comparaison (*fig.* 95). Les arêtes *b*F, *c*G du prisme étant parallèles et égales à l'arête *a*D, leurs projections seront parallèles et égales à la projection de cette arête. Tout revient donc à la construction de l'arête *a*D.

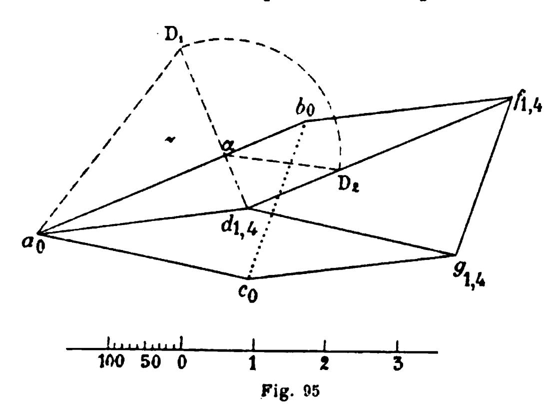


Fig. 95

Supposons le plan *ba*D rabattu sur le plan horizontal autour de l'horizontale *ab* ; la droite *a*D se rabattra suivant la droite aD_1 faisant avec la droite *ab* un angle de 30°. Portons sur cette droite une longueur aD_1 égale à la longueur donnée de l'arête *a*D, le point D_1 est le rabattement du point D ; ce point se relève donc sur la perpendiculaire αD_1 menée par le point D_1 à la droite *ab*.

Remarquons maintenant que l'angle du rabattement est précisément l'angle du plan *ab*DF avec le plan horizontal, il est donc connu et égal à 60°. Nous mènerons par le point α une droite αD_2 faisant avec la

droite αd un angle de 60°, et nous prendrons la longueur αD_2 égale à la longueur αD_1 ; nous n'aurons plus qu'à mener la perpendiculaire dD_2 sur la droite αd pour avoir la projection d du point D, sa cote dD_2 est égale à 1,4.

Nous achevons la projection du prisme en traçant les droites bf et cg parallèles et égales à la droite ad.

Pour avoir les cotes des points F et G, il suffit de remarquer que la différence des cotes des extrémités d'une arête est la même pour les trois arêtes. Dans le cas actuel, la base abc étant dans le plan de comparaison, la base DFG est dans un plan horizontal, et les trois points D, F, G ont même cote.

Remarque. — La projection de l'arête DF se confond avec la droite dD_2 parce que ces deux droites sont parallèles à la droite ab.

Ponctuation. — Le sommet D étant au-dessus du plan horizontal, la base abc est cachée par les faces abFD, acGD et la base supérieure DFG ; par suite l'arête bc est cachée.

76. VII. — *Construire la projection cotée d'un cube* ABCDEFGH *connaissant la projection cotée du sommet* A *et sachant que la diagonale* DF *du cube est sur la verticale donnée* d (*fig.* 97).

Le plan déterminé par le sommet A et par la diagonale DF est un plan de symétrie du cube (*fig.* 96) ; comme la diagonale DF est verticale, ce plan est aussi vertical ; nous le prendrons comme plan vertical de projection (72).

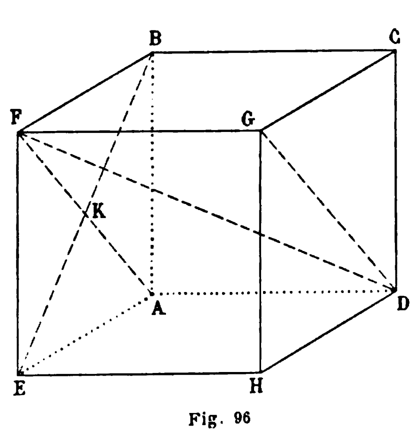


Fig. 96

Le triangle ADF est rectangle au point A ; l'un des côtés de l'angle droit, AD, est un côté du cube, et l'autre côté de l'angle droit, AF, est la diagonale d'une face, le triangle rectangle ADF est donc tel que l'un de ses côtés est la diagonale du carré construit sur l'autre.

Tous les triangles rectangles jouissant de cette propriété sont sem-

blables puisque le rapport de leurs côtés de l'angle droit est constant. Nous construirons donc arbitrairement un triangle rectangle jouissant de cette propriété, et le triangle ADF sera un triangle semblable à ce triangle, ayant pour sommet le point A et son hypoténuse sur la verticale *d* ; il est dans le plan vertical.

Ce triangle construit, nous achèverons sans peine le rectangle ADGF.

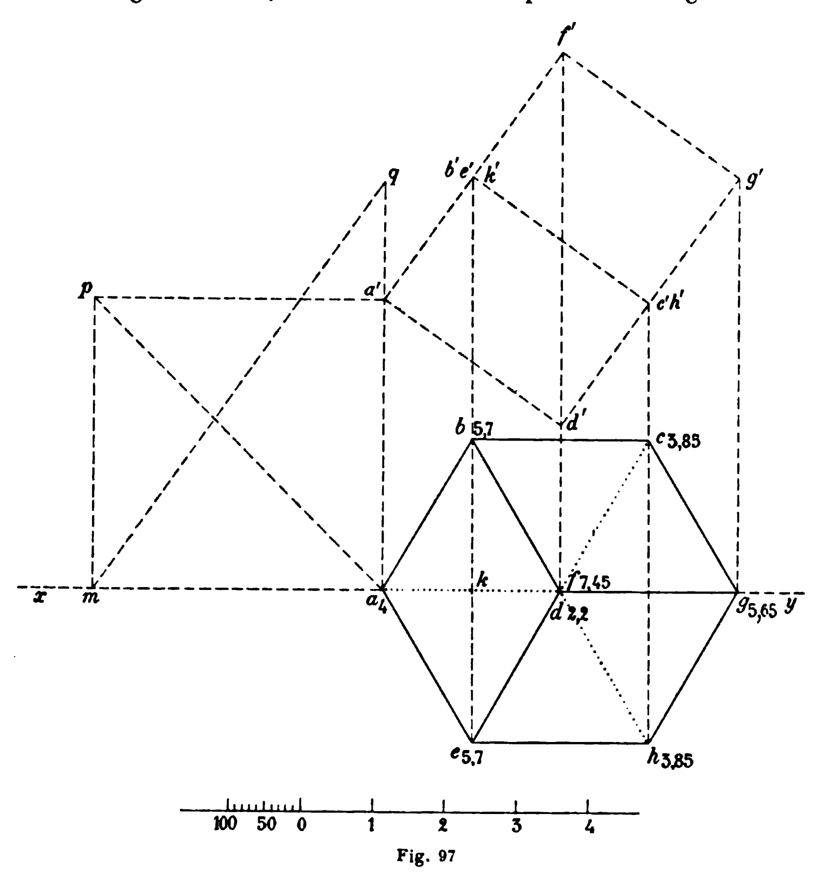


Fig. 97

Nous construirons ensuite les sommets B et E en menant par le point K, milieu de la droite AF, la droite BE perpendiculaire au plan ADGF, et nous prendrons de part et d'autre du point K, sur cette droite, des longueurs égales à la moitié de AF. Les sommets C et H s'obtiendront en menant par les points B et E des parallèles à la droite AD et par les points D et G des parallèles à la droite AE.

Construction du triangle ADE. — La ligne de terre *xy* est la droite *ad* (*fig.* 97). Nous figurons d'abord la projection verticale a' du point A et la projection verticale dd' de la verticale *d*. Nous construisons ensuite un carré sur la longueur aa' et nous prenons la longueur *aq* égale à sa diagonale *ap*. Le triangle rectangle *maq* est semblable au triangle que nous voulons construire. Par le point a' nous menons la droite $a'f'$ parallèle à la droite *mq* et nous traçons la droite $a'd'$ perpendiculaire à la droite $a'f'$. Le triangle $a'd'f'$ a pour côté $a'd'$ le côté du carré dont la diagonale est $a'f'$. Le triangle $a'd'f'$ est le triangle ADF lui-même. Le côté du cube est égal à la longueur $a'd'$. Il se projette horizontalement suivant *ad* sur la ligne de terre. Le point F se projette horizontalement au point *f* confondu avec le point *d*.

Nous achevons ensuite dans le plan vertical le rectangle $a'd'g'f'$ et nous en déduisons la projection horizontale *g* du sommet G.

Construction des sommets B et E. — Nous déterminons le point (k, k') milieu de la droite (af, $a'f'$). La droite BE est la ligne de bout k' ; comme elle est parallèle au plan horizontal, les longueurs comptées sur cette droite se projettent horizontalement suivant des longueurs égales ; nous prendrons donc sur sa projection horizontale les longueurs *kb* et *ke* égales à la longueur $k'a'$. Les sommets B et E se projettent horizontalement aux points *b* et *e* et verticalement au point k'.

Construction des sommets C et H. — Nous menons les droites *bc*, *eh* parallèles à la droite *ad*, et les droites *gc*, *dh* parallèles à la droite *ae*, nous obtenons ainsi les projections horizontales *c* et *h* des sommets C et H ; leurs projections verticales sont confondues au milieu de la droite $d'g'$. Il n'y a plus qu'à mesurer les cotes des différents sommets.

Remarque. — L'hexagone *abcghe* est un hexagone régulier.

En effet, *da*, *dc*, *dh* sont les projections des trois arêtes DA, DC, DH, qui, dans l'espace, font des angles égaux avec le plan horizontal ; comme en outre elles font entre elles des angles égaux, les trois angles *adc*, *cdh*, *hda* sont égaux. Le triangle *ach* est équilatéral ; le point *d* est son centre, et comme la droite *ch* est perpendiculaire au milieu de la droite *fg*, le polygone *abcghe* est bien un hexagone régulier.

Ponctuation. — Le contour *abcghea* qui limite la projection du

cube est vu (70). L'hexagone est la projection, d'une part, des faces DABC, DCGH, DHEA, groupées autour du sommet D, et, d'autre part, des faces FEAB, FEHG, FGCB, groupées autour du sommet F. La projection verticale nous montre que le sommet F est vu tandis que le sommet D est caché, donc les trois faces du second groupe sont vues et cachent les trois autres. Il en résulte que les arêtes FB, FE, FG sont vues et que les arêtes DA, DC, DH sont cachées.

77. Construction d'un polyèdre reposant par une de ses faces sur un plan donné incliné sur le plan horizontal. — Considérons un plan perpendiculaire au plan vertical $P\alpha P'$ et un point (a, a') (*fig.* 98). Supposons qu'on rabatte le plan $P\alpha P'$ sur le plan horizontal, en imaginant que, dans sa rotation autour de sa trace horizontale, il entraîne le point (a, a'), et proposons-nous de déterminer les nouvelles projections de ce point après la rotation. Menons par le point (a, a') la perpendiculaire $(ab, a'b')$ au plan $P\alpha P'$; le point (b, b') où elle coupe le plan vient occuper, après la rotation, la position (b_1, b'_1) (33). Le point (a, a') se projette alors horizontalement au même point a_1 que le point (b_1, b'_1), et sa nouvelle cote $b'_1a'_1$ est égale à la distance ba' du point (a, a') au plan $P\alpha P'$.

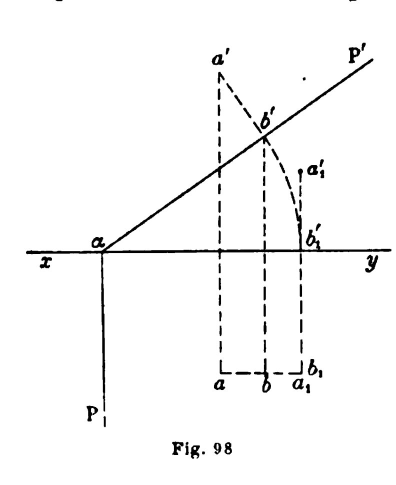


Fig. 98

Inversement, étant données les deux projections a_1, a'_1 d'un point de l'espace supposé lié au plan $P\alpha P'$, après qu'on a rabattu ce plan sur le plan horizontal, on reviendra aux projections a, a' de ce point avant la rotation du plan $P\alpha P'$ en menant la droite a_1a parallèle à la ligne de terre, relevant le point (b_1, b'_1) en (b, b'), et prenant sur la perpendiculaire menée par le point b' à la trace verticale $\alpha P'$ la longueur $b'a'$ égale à la longueur $b'_1a'_1$. Du point a' on déduit le point a par une ligne de rappel.

Les opérations précédentes trouvent une application dans la construction d'un polyèdre reposant par une de ses faces sur un plan donné, lorsque la construction de ce polyèdre sur le plan horizontal est simple.

Exemple. — *On donne un plan* P *par son échelle de pente et dans ce plan deux points* A *et* B *par leurs projections cotées. Construire la projection cotée d'un tétraèdre* SABC *dont la face* ABC *soit un triangle situé dans le plan* P *et qui ait la droite* AB *pour un de ses côtés, dont l'angle trièdre* S *soit trirectangle, dont la longueur de l'arête* SA *soit donnée, et dont enfin l'angle dièdre* SABC *soit égal à* 50°.

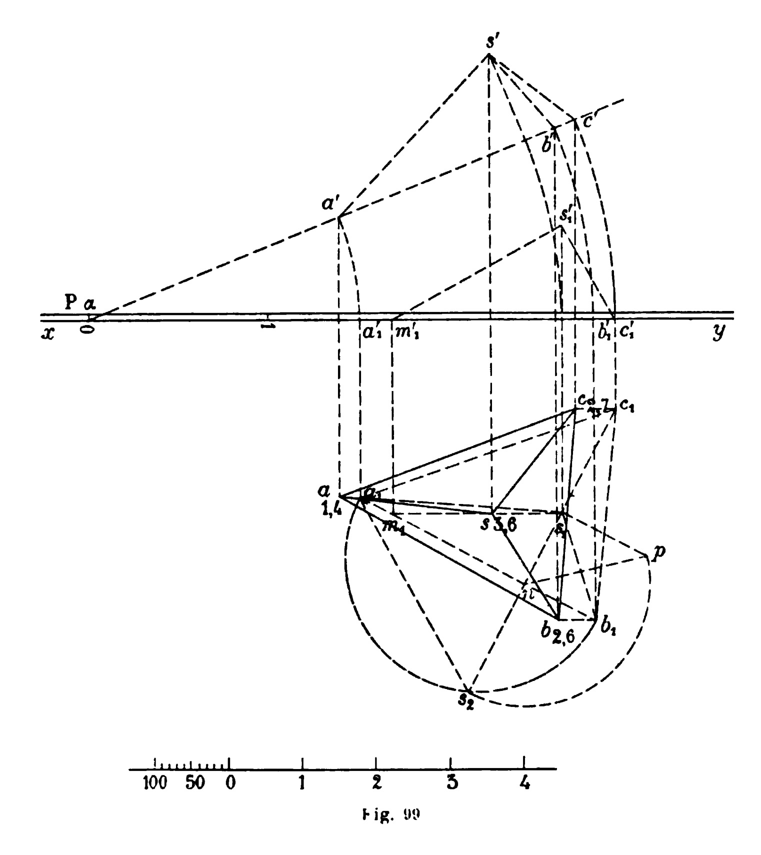


Fig. 99

Il serait aisé de construire le tétraèdre si la face ABC devait être dans le plan horizontal. En effet, on supposerait la face ABS rabattue sur le plan horizontal autour du côté AB situé dans ce plan ; le rabattement du point S serait sur la demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre puisque l'angle ASB est droit, et à une distance du point A égale à la longueur donnée de l'arête SA. L'angle du rabattement serait d'après l'énoncé égal à 50°, car c'est l'angle du plan ASB

avec le plan horizontal, c'est-à-dire le plan ABC ; on pourrait donc relever le sommet S. Cela fait, on obtiendrait l'arête SC en menant par le point S une perpendiculaire au plan ASB.

Nous ramènerons la construction du tétraèdre à celle que nous venons d'indiquer en prenant un plan vertical perpendiculaire au plan P (*fig.* 99) ; choisissons comme ligne de terre xy la droite P elle-même. Soient a et b les projections données des sommets A et B, 1,4 et 2,6 leurs cotes. Nous construisons d'abord les projections verticales a' et b' des points A et B ; comme le plan P est perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale $\alpha P'$ est la droite $a'b'$. Nous commençons par rabattre le plan P sur le plan horizontal. Les points (a, a'), (b, b') se rabattent aux points a_1 et b_1. D'après la construction indiquée tout à l'heure, nous décrivons sur a_1b_1 comme diamètre une demi-circonférence et nous déterminons sur cette courbe le point s_2 tel que la longueur a_1s_2 soit égale à la longueur donnée de l'arête AS supposée ici égale à 3^m. Le point s_2 se relève au point (s_1, s'_1), l'angle s_1np étant égal à 50° et la cote du point (s_1, s'_1) à s_1p. Il faut maintenant par le point (s_1, s'_1) mener une perpendiculaire au plan $a_1S_1b_1$. Sa projection horizontale est perpendiculaire à la droite a_1b_1 qui est une horizontale du plan $a_1S_1b_1$, c'est par suite la droite ns_1. Pour avoir sa projection verticale, nous construirons une frontale du plan, par exemple celle dont la projection horizontale est la parallèle à la ligne de terre s_1m_1 menée par le point s_1 ; le point m_1 sur a_1b_1 se projette verticalement au point m'_1 sur la ligne de terre et la projection verticale de la frontale est la droite $m'_1s'_1$. Par le point s'_1 nous menons la perpendiculaire $s'_1c'_1$ à la droite $m'_1s'_1$; c'est la projection verticale de la perpendiculaire au plan $a_1S_1b_1$ menée par le point (s_1, s'_1), sa trace horizontale est le point (c_1, c'_1) et les deux projections du tétraèdre, après la rotation du plan P, sont $s_1a_1b_1c_1$ et $s'_1a'_1b'_1c'_1$. Nous ramenons par la méthode indiquée plus haut les points (s_1, s'_1) et (c_1, c'_1) à leurs positions primitives (s, s') et (c, c'), nous mesurons les cotes de ces deux points et $sabc$ est la projection cotée du tétraèdre demandé.

Toutes les arêtes du tétraèdre sont vues.

II. — Section plane des polyèdres.

78. La section d'un polyèdre par un plan se compose d'un ou plusieurs polygones dont les côtés sont les droites d'intersection des diverses faces du polyèdre et du plan que nous appellerons plan sécant. Le problème de la détermination d'une section plane d'un polyèdre est par conséquent une application de la recherche de l'intersection de deux plans ; l'intersection d'une face du polyèdre et du plan sécant doit être d'ailleurs limitée aux points où elle coupe le périmètre du polygone formant la face considérée, de telle façon qu'on ne conserve que les parties situées à l'intérieur des faces du polyèdre.

On commencera par déterminer l'intersection d'une face du polyèdre et du plan sécant. Soit MN la portion de la section plane comprise à l'intérieur de la face considérée ; supposons qu'un mobile décrive le polygone d'intersection en partant du point M et marchant vers le point N. Le mobile, en quittant le point N, passe dans la face du polyèdre adjacente à la précédente suivant l'arête sur laquelle se trouve le point N. On devra donc chercher l'intersection du plan sécant et de cette nouvelle face du polyèdre, et ainsi de suite. Quand on sera revenu au point M, si toutes les faces du polyèdre n'ont pas été employées, il faudra examiner si la section ne comprend pas un nouveau polygone, c'est-à-dire qu'on devra s'assurer si l'une des faces non utilisées ne coupe pas le plan sécant suivant une droite située en partie sur la surface du polyèdre. S'il en est ainsi, on procédera pour le second polygone comme pour le premier, et l'on continuera jusqu'à épuisement des faces du polyèdre.

Pour déterminer l'intersection d'une face et du plan sécant, on pourra choisir deux arêtes de la face en question et déterminer les points où ces deux arêtes coupent le plan sécant; en joignant ces deux points, on aura l'intersection cherchée, et il sera aisé de la limiter à la portion qui fait partie de la section plane du polyèdre.

On cherchera les points d'intersection des différentes arêtes du polyèdre et du plan sécant en employant des plans auxiliaires dont les horizontales soient parallèles ; on les obtiendra en choisissant une

direction arbitraire et menant par les sommets du polyèdre des parallèles à cette direction.

Remarque. — Lorsque les plans de certaines faces du polyèdre sont parallèles, on se souviendra que leurs intersections par le plan sécant doivent être parallèles.

79. Exemple I. — *Un tétraèdre* ABCD *étant donné par sa projection cotée* (*fig.* 100), *construire la projection cotée de la section du tétraèdre par un plan* P *donné par son échelle de pente.*

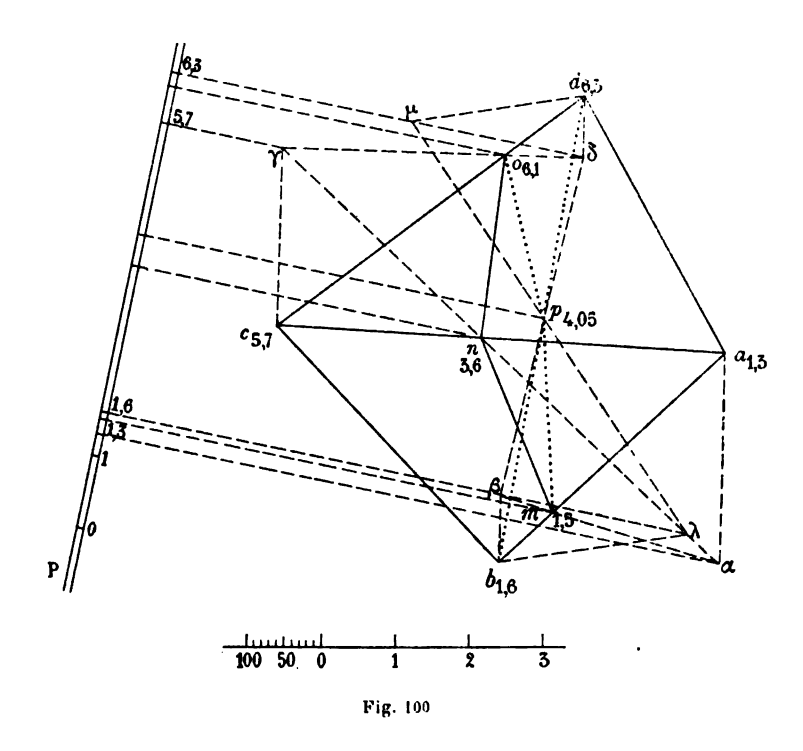


Fig. 100

Nous menons d'abord par les projections des sommets du tétraèdre les parallèles $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ à une direction arbitraire, puis nous déterminons les horizontales du plan P ayant mêmes cote que les sommets ; nous marquons les points d'intersection α, β, γ, δ des horizontales de même cote. Choisissons l'une des faces du tétraèdre, ABC par exemple. Partons de l'arête AB ; elle coupe le plan P au point *m*

déterminé par la droite $\alpha\beta$ d'intersection du plan P et du plan auxiliaire passant par la droite AB (56). La droite AC coupe le plan P au point n déterminé par la droite $\alpha\gamma$. Un premier côté de l'intersection sera la droite mn. Le point n étant sur la droite ac, nous devons maintenant déterminer l'intersection du plan P et de la face ACD. La droite $\gamma\delta$ nous donne le point o d'intersection de l'arête CD et du plan P et, le point O étant sur l'arête CD, nous devons passer à l'intersection du plan P et de la face CDB. Le point d'intersection de l'arête BD et du plan P se projette au point p. Comme dans notre épure les droites $\beta\delta$ et bd se coupent sous un angle très aigu, la position du point p est mal déterminée; pour nous assurer de la situation de ce point, nous avons eu recours à un plan auxiliaire passant par la droite BD mais différent du premier, et déterminé par les deux horizontales $b\lambda$, $d\mu$. La droite $\lambda\mu$ coupe la droite bd sous une inclinaison qui permet de déterminer la position du point p. Le point p étant sur la droite bd, nous passons à l'intersection du plan P et de

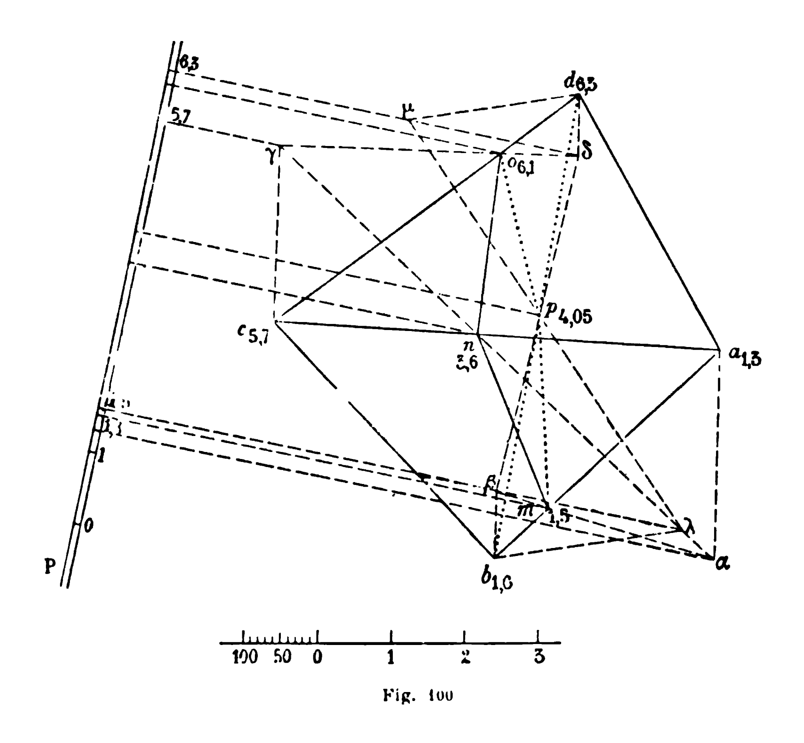


Fig. 100

la face ABD : c'est la droite *pm*, et nous sommes revenus au point de départ après avoir employé toutes les faces du tétraèdre. La section cherchée se projette suivant le quadrilatère *mnop*. Les sommets de cette section étant dans le plan P, on détermine leurs cotes sans difficulté.

Remarque. — L'intervalle du plan P est égal à l'unité, c'est-à-dire que le plan P fait un angle de 45 degrés avec le plan de comparaison. Il s'ensuit que la distance d'un point quelconque de l'échelle de pente du plan au point de cette droite ayant pour cote zéro est égale à la cote de ce point. Nous avons vérifié les cotes des sommets de la section plane en les calculant sur les arêtes du tétraèdre par le procédé arithmétique (42).

Ponctuation. — Proposons-nous de représenter la surface du tétraèdre supposée opaque avec sa section par le plan P. Pour établir la ponctuation du tétraèdre, il faut décider laquelle des deux arêtes AC et BD est vue. Pour y parvenir, nous calculons les cotes des points de ces deux arêtes qui se projettent au point d'intersection *h* de leurs projections. Celui de l'arête AC a pour cote 2,59 et celui de l'arête BD 2,2; c'est donc l'arête AC qui est vue. Par suite les deux faces ACB, ACD cachent les deux faces ABD, CBD. Il en résulte que les deux côtés MN et NO de la section plane sont vus, tandis que les deux autres côtés OP et PM sont cachés.

Grandeur de la section. — Si l'on voulait avoir la grandeur de la section dans l'espace, il suffirait de rabattre le plan P autour d'une de ses horizontales en effectuant l'opération pour les quatre sommets M, N, O, P.

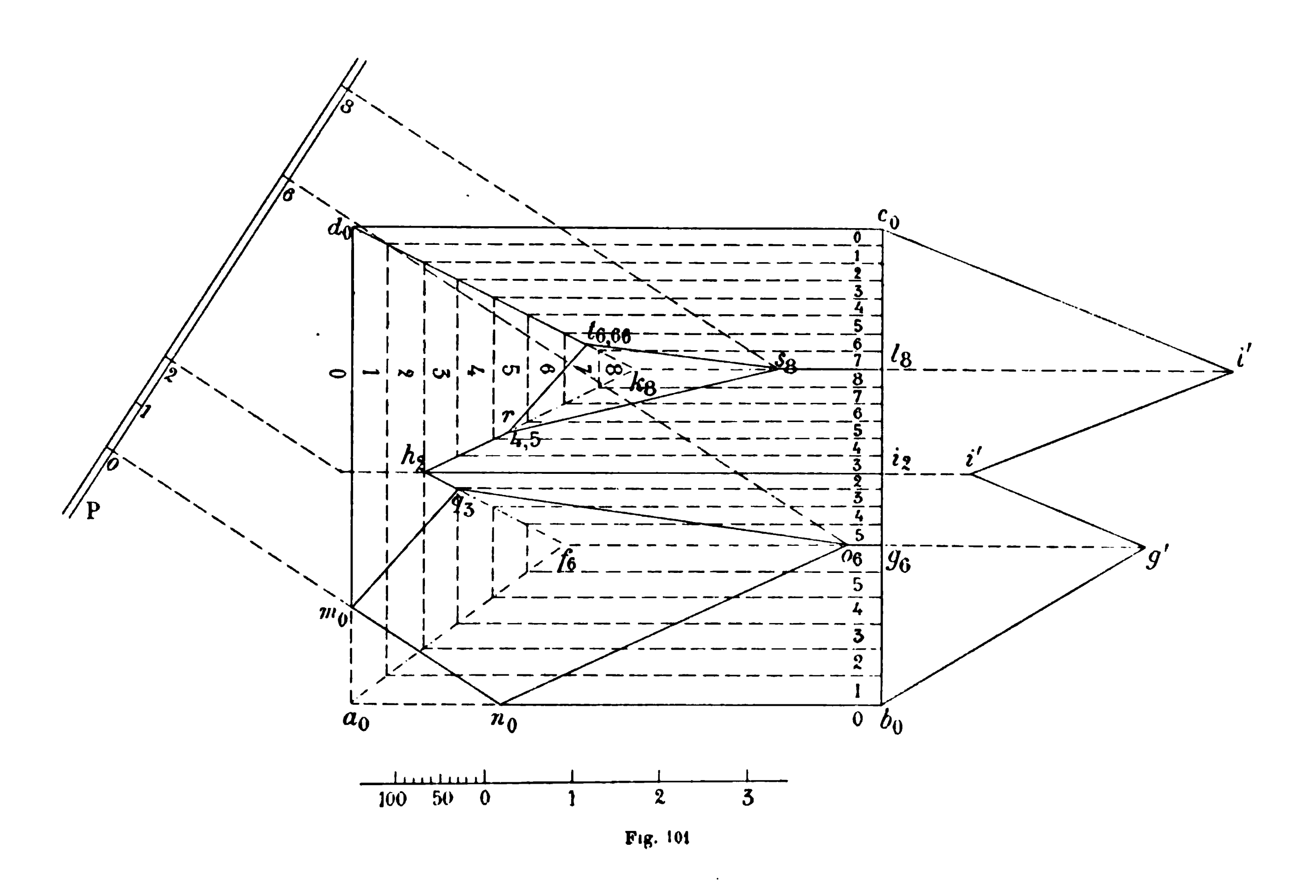


Fig. 101

80. Exemple II. — *On donne la projection cotée d'un polyèdre* ABCDFGHIKL (*fig.* 101) *et un plan* P *par son échelle de pente. Représenter la partie solide du polyèdre comprise dans l'angle aigu formé par le plan* P *et le plan de comparaison.*

Il nous faut d'abord construire la section du solide par le plan P.

L'horizontale de cote zéro du plan P coupe la face du polyèdre située dans le plan de comparaison suivant la droite *mn* qui sera un premier côté de l'intersection. Le point *n* étant sur l'arête *ab*, nous déterminons l'intersection *n*O du plan P et de la face *ab*FG. Le point O étant sur l'arête FG, nous passons à la face FGIH et nous obtenons l'intersection OQ de cette face et du plan P. Enfin la face *a*FHK*d* est coupée par le plan P suivant la droite *m*QRT, dont la portion QR est extérieure au polyèdre. Nous obtenons donc un premier polygone fermé *mn*OQ. Un premier côté de la partie restante de la section sera la portion de droite RT. Arrivés au point T nous passons dans la face *cd*KL et nous obtenons le côté TS. Enfin la face HILK est coupée par le plan P suivant la droite SR. L'intersection est donc composée du quadrilatère *mn*OQ et du triangle RST.

Les cotes des sommets Q, R, T ont été calculées sur les côtés FH, HK, K*d* par le procédé arithmétique. Pour mieux figurer la forme du polyèdre, nous en avons fait une élévation sur le plan vertical de la face *b*GIL*c*, en réduisant de moitié l'échelle de la projection horizontale (40).

Ponctuation. — Le volume à représenter est limité par le contour polygonal *mnbcd* qui est vu (70). Le solide F*am*QO*n* qui est au-dessus du plan P par rapport au plan de comparaison doit être supposé enlevé. Les arêtes F*a*, FO, FQ, *am*, *an*, doivent donc être représentées en trait mixte. Toutes les faces du polyèdre, sauf la face *abcd*, sont vues. Donc les côtés *m*Q, QO, O*n* de la section plane sont vus. Le côté *mn* était caché par une partie du solide F*am*QO*n* ; comme ce solide est enlevé, le côté *mn* redevient vu. On voit comme précédemment que le tétraèdre KRST doit être supposé enlevé ; donc les arêtes KR, KS, KT doivent être représentées en trait mixte. Les côtés RS, ST, TR, qui appartiennent à des faces vues, sont vus.

81. Introduction d'un plan vertical perpendiculaire au plan sécant. — Quand le plan dont on cherche l'intersection avec le polyèdre est perpendiculaire au plan vertical, on obtient aisément les projections ver-

ticales des sommets de la section en prenant les points d'intersection de la trace verticale du plan sécant avec les projections verticales des arêtes du polyèdre. On en déduit les projections horizontales par des lignes de rappel.

On peut ramener un cas quelconque à ce cas particulier en faisant une élévation du polyèdre sur un plan vertical choisi perpendiculaire au plan sécant.

Exemple. — *On donne la projection cotée d'un octaèdre* ABCDEF *et un plan* P *par son échelle de pente* (*fig.* 102). *Construire la section de ce polyèdre par le plan* P.

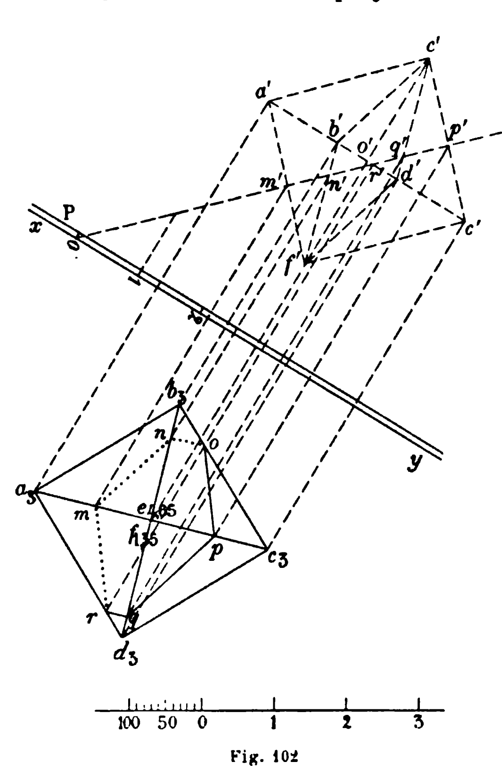


Fig. 102

L'octaèdre est formé par la réunion des deux pyramides quadrangulaires régulières EABCD, FABCD, symétriques par rapport à la base commune ABCD qui est un carré situé dans le plan horizontal de cote 3. Prenons comme plan vertical le plan vertical perpendiculaire au plan sécant qui a pour trace horizontale la droite P qui sera la ligne de terre xy. Nous construisons la projection verticale $e'a'b'c'd'f'$ de l'octaèdre et la trace verticale $\alpha P'$ du plan. Cette trace coupe l'arête $a'f'$ au point m' qui se projette horizontalement sur la droite af au point m. Elle coupe ensuite l'arête $b'f'$ au point n', qui se projette horizontalement au point n sur bf. MN est l'intersection du plan P et de la face ABF. Arrivés au point N sur l'arête BF nous passons dans la face adjacente BFC. La trace $\alpha P'$ coupe la droite $b'c'$ au point o' qui se projette horizontalement

au point o sur bc. Nous passons ensuite dans la face BCE et nous obtenons le point P sur l'arête EC. La face adjacente est la face ECD. La trace $\alpha P'$ coupe la droite $e'd'$ au point q' qui se projette horizontalement au point q. Nous passons ensuite dans la face EDA et nous obtenons le point R sur l'arête AD. Enfin nous revenons au point M dans la face ADF, et la projection de la section est le polygone $mnopqr$.

Ponctuation. — Représentons la surface opaque de l'octaèdre avec la section de cette surface par le plan P.

Les quatre faces aboutissant au point F sont cachées par les quatre faces aboutissant au point E. Donc les côtés RM, MN, NO sont cachés puisqu'ils appartiennent à des faces cachées tandis que les trois autres côtés sont vus.

Remarque. — Dans l'exemple que nous avons choisi, la distance des points E et F au plan ABCD est égale à la demi-diagonale du carré ABCD. Il en résulte que les quadrilatères AECF, BEDF sont des carrés égaux au carré ABCD. L'octaèdre a pour faces huit triangles équilatéraux égaux et ses angles polyèdres ne diffèrent pas les uns des autres : c'est un octaèdre régulier.

82. Intersection d'une droite et de la surface d'un polyèdre. — Pour trouver les points où une droite coupe la surface d'un polyèdre, on fait passer par la droite un plan arbitraire dont on détermine l'intersection avec la surface du polyèdre. Les points cherchés sont les points où la droite donnée coupe cette intersection.

On fait choix en général comme plan passant par la droite d'un des plans qui la projettent sur les plans de projections.

Si le polyèdre est une pyramide, on prend le plan passant par la droite et le sommet de la pyramide. Il coupe le plan de la base suivant une droite qui rencontre le contour de cette base en un certain nombre de points. On joint ces points au sommet de la pyramide et on détermine les points d'intersection des droites ainsi obtenues avec la droite donnée.

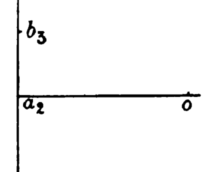
Pour un prisme, on fait choix du plan passant par la droite et parallèle aux arêtes du prisme. On achève comme pour la pyramide, les droites qui passent par le sommet étant remplacées par des droites parallèles aux arêtes du prisme.

EXERCICES

1. — Construire un trièdre connaissant les trois faces *a*, *b*, *c*. [On construit dans le plan de comparaison un angle BSC égal à la plus grande face *a*, on suppose la face ASB rabattue sur le plan de comparaison autour de SB suivant un angle BSA_1 et la face ASC rabattue sur le plan de comparaison autour de SC suivant un angle CSA_2. SA_1 et SA_2 sont les rabattements de l'arête SA dans deux systèmes différents ; on en déduit un point de l'arête SA qu'on joint au point S (74)].

2. — Trouver la grandeur de la projection horizontale d'un angle, connaissant l'angle de l'espace et les angles des deux côtés avec la verticale (c'est ce qu'on appelle réduire un angle à l'horizon).

3. — On donne un point O dans le plan horizontal de projection et une droite AB par deux de ses points. *ab* est perpendiculaire à *oa*, $oa = 3^{cm},5$, $ab = 1^{cm},3$.



1° Construire la projection cotée d'un parallélépipède rectangle à base carrée ayant pour centre le point O, dont une arête latérale soit située sur la droite AB et dont la diagonale ait 10^{cm}.

2° Soit C celui des sommets du parallélépipède situés sur AB qui a la plus grande cote. Construire la section du parallélépipède par le plan perpendiculaire à la diagonale OC menée par le point O.

4. — On donne un plan P par son échelle de pente et un point S dans ce plan. Construire la projection cotée d'une pyramide triangulaire SABC ayant le point S pour sommet et s'appuyant sur le plan de comparaison par sa base ABC, sachant que le plan de la face ASC est perpendiculaire au plan P et fait un angle donné avec le plan horizontal, que la face ASB est située dans le plan P et connaissant l'angle ASC et l'angle ASB. Mener par le point de concours G des droites joignant les sommets aux centres de gravité des faces opposées un plan perpendiculaire à la droite SG, et construire la projection cotée de la section de la pyramide par ce plan.

5. — On donne un plan P par son échelle de pente et un point S dans ce plan. Le point S est le sommet d'un tétraèdre SABC qui s'appuie par sa face ABC sur le plan horizontal. L'angle solide S est trirectangle. Le

plan de la face SAB est parallèle à une droite donnée, et la face SBC est dans le plan P. Construire la projection cotée du tétraèdre. — Construire la projection cotée de la section du tétraèdre par un plan passant par les milieux des arêtes AC et SB.

6. — On donne une droite D et un point A. Mener par le point A un plan parallèle à la droite D et faisant un angle donné avec le plan horizontal. Construire un tétraèdre régulier dont une face soit située dans ce plan et ait un côté de longueur donnée dans le plan horizontal.

7. — Construire un tétraèdre SABC dont la base est dans le plan horizontal de cote zéro connaissant les longueurs des arêtes AB, SA, SB, et les dièdres AC, BC, AB. (N).

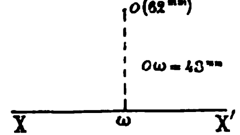
8. — Un tétraèdre SABC a sa base ABC donnée sur le plan horizontal. La longueur de l'arête SA est donnée, et cette arête fait un angle donné avec l'arête AB. Sa projection horizontale fait avec AB à l'intérieur du triangle ABC un angle donné.

1° Construire le tétraèdre.

2° On mène la perpendiculaire commune aux deux arêtes SA et BC. Construire la section du tétraèdre par un plan passant par cette droite et perpendiculaire à l'arête SB.

9. — Construire la projection cotée d'un tétraèdre SABC dont la base ABC est dans le plan de comparaison, dont l'angle trièdre S est trirectangle et dont on connaît la projection du sommet et l'arête AB par sa position et sa longueur.

10. — XX' est la trace horizontale d'un plan P, qui fait un angle de 40° avec le plan horizontal ; *o* est la projection horizontale d'un point O dont la cote verticale est de 62mm, la distance *oω* de *o* à XX' étant de 48mm.



1° Tracer la projection cotée d'une droite (D) passant par le point O, parallèle au plan P et faisant un angle de 25° avec le plan horizontal ; mener par cette droite un plan Q perpendiculaire au plan P ; construire les traces du plan Q sur le plan horizontal et sur le plan P.

2° Tracer la projection cotée d'un tétraèdre régulier OABC dont le point O est un sommet, dont la droite (D) est un axe, dont un des côtés BC est situé dans le plan P, et dont par conséquent le plan Q est un plan de symétrie.

(*École navale, 1891.*)

11. — Étant donnés deux points A et B dont les cotes au-dessus du

plan de comparaison sont respectivement A ($0^m,38$), B ($0^m,56$), et dont la distance horizontale est de $0^m,42$, construire à l'échelle de $\frac{1}{10}$ la projection cotée d'un prisme droit à base carrée satisfaisant aux conditions suivantes : le côté de la base est AB ; la pente du plan de cette base est $\frac{1}{12}$; la hauteur du prisme est de $0^m,60$.

Indiquer les intersections de la figure avec une série de plans horizontaux équidistants entre eux de $0^m,20$.

(*École navale, 1890.*)

12. — On donne la trace horizontale d'un plan qui fait avec le plan de comparaison un angle de 50°. Dans le plan de comparaison on donne un triangle équilatéral *abc*. Ce triangle est la base d'un prisme dont les arêtes, parallèles à un plan vertical donné, font un angle de 80° avec le plan horizontal. Représenter la partie solide du prisme comprise entre le premier plan et le plan de comparaison. — Construire les projections du cercle circonscrit à la section du prisme par le plan.

13. — On donne un point A et la projection horizontale d'une droite L passant par un point donné B. Déterminer la droite L de façon qu'elle fasse un angle de 45° avec la verticale passant par le point A. — Mener la perpendiculaire commune AC à la droite L et à la verticale du point A. — Construire un cube ayant pour arête AC et dont une seconde arête aboutissant au point C soit dirigée suivant la droite L. — Construire la section du cube par le plan passant par la verticale du point A et un de ses sommets. — Construire la grandeur de cette section.

14. — On donne une droite AC par les projections cotées de ses extrémités. Cette droite est la diagonale d'un carré ABCD dont le plan fait un angle de 45° avec le plan horizontal. Construire une pyramide régulière ayant pour base le carré ABCD et pour hauteur une longueur donnée. Soient M et N les milieux des côtés AB et BC. Par la droite MN on mène un plan faisant un angle donné avec le plan ABCD. Construire la section de la pyramide par ce plan.

15. — Construire un tétraèdre régulier connaissant un sommet et le centre.

16. — On donne un point O dans le plan horizontal de projection et une droite AB par son échelle de pente. Construire la projection cotée d'un parallélépipède rectangle à base carrée ayant pour centre le point O, dont une arête latérale soit située sur la droite AB et dont la diagonale ait une longueur donnée.

CHAPITRE II

SURFACES COURBES. SURFACES CONIQUES. SURFACES CYLINDRIQUES.

---

83. Définitions. — Supposons qu'un point se meuve dans l'espace et que, partant de la position M, il aboutisse à la position P (*fig.* 103); l'ensemble des positions successives qu'il a occupées et qui forment le chemin qu'il a parcouru s'appelle une *ligne*. Toute ligne autre que la ligne droite est dite *courbe* et se désigne couramment par le simple mot de *courbe*.

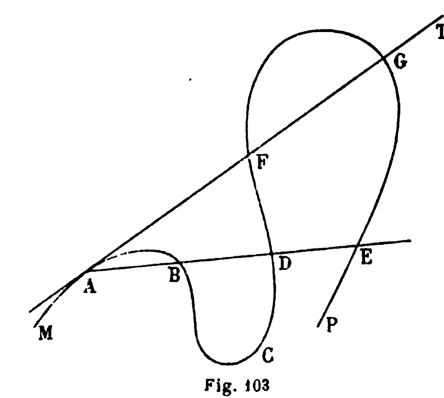


Fig. 103

Il peut arriver que le point P se confonde avec le point M, alors la courbe est fermée.

Si la courbe est tout entière dans un plan, elle est dite *plane*. Toute courbe qui n'est pas plane est dite *gauche*.

Une courbe peut être définie par certaines propriétés communes à tous ses points. Par exemple l'ensemble de tous les points d'un plan situés à une même distance d'un point de ce plan forme une ligne courbe qu'on appelle une circonférence.

Étant donnée une ligne courbe C (*fig.* 103) et une droite qui la

coupe en plusieurs points A, B, D, E, si l'on imagine que cette droite tourne autour du point A jusqu'à ce que le point d'intersection B, se rapprochant indéfiniment du point A, vienne se confondre avec lui, en général la droite ABDE tend vers une position limite AT qu'on appelle la *tangente* à la courbe au point A. La droite AT est considérée comme coupant la courbe au point A en deux points confondus; elle peut d'ailleurs la couper en d'autres points F, G.

Le plan perpendiculaire à la tangente à la courbe au point A s'appelle *plan normal* à la courbe en ce point.

Imaginons maintenant qu'une ligne se déplace dans l'espace en changeant de position et même quelquefois de forme suivant une loi déterminée. L'ensemble des positions successives occupées par la ligne s'appelle une *surface*.

Supposons par exemple qu'on donne un cercle fixe et qu'un cercle variable se déplace de telle façon que son centre décrive un diamètre du cercle fixe, que son plan reste perpendiculaire à ce diamètre et que la circonférence du cercle variable rencontre dans chacune de ses positions celle du cercle fixe; la circonférence du cercle variable engendre une surface qu'on appelle sphère. La même surface est engendrée par la demi-circonférence du cercle qu'on avait primitivement supposé fixe quand elle effectue une révolution complète autour de son diamètre.

Une surface peut encore être définie par une propriété géométrique à laquelle doit satisfaire chacun de ses points. Par exemple tous les points de la sphère que nous avons définie tout à l'heure sont à la même distance du centre de la demi-circonférence qui engendre la surface et cette propriété la définit parfaitement.

Plan tangent. — *Les tangentes aux différentes courbes qu'on peut tracer par un point d'une surface sur cette surface, au point considéré, sont en général dans un même plan qu'on appelle plan tangent à la surface en ce point.*

Cette proposition se démontre en géométrie analytique et, dans le cas général, le calcul peut seul permettre d'établir l'existence du plan tangent et de reconnaître à quelles conditions le théorème est en défaut. On peut cependant, par des considérations géométriques, montrer, pour certaines catégories de surfaces, qu'en un point quelconque il existe un plan tangent.

Considérons par exemple une surface engendrée par une courbe de

forme invariable dont le mouvement est assujetti à certaines conditions et que nous appellerons génératrice de la surface. Soient M un point de la surface, G la génératrice passant par ce point, et supposons que C soit une courbe fixe tracée par le point M sur la surface et que le point de la génératrice actuellement en M est assujetti à décrire (*fig*. 104). Menons par le point M sur la surface un arc de courbe quelconque MD. Soit G′ une position de la génératrice très voisine de la première; elle coupe la courbe C au point A′ et la courbe MD au point M′ l'un et l'autre très voisins du point M. Menons par le point M la droite MA_1 parallèle à A′M′. Les trois droites MA_1, MM′, MA′ sont dans un même plan P déterminé par MA_1 et A′M′. Faisons tendre la génératrice G′ vers la génératrice G. La corde MA′ tend vers la tangente MT à la courbe C. MA_1 reste parallèle à A′M′; mais comme la courbe G′ est de forme invariable, et que le point M est le point de la courbe G′ qui coïncidait avant le mouvement avec le point A′, la corde A′M′ en tendant vers zéro a pour position limite la tangente MS à la génératrice G au point M, donc MA_1 qui est parallèle à M′A′ et qui passe par le point M a pour position limite la tangente MS. Le plan P a donc pour position limite le plan TMS et la position limite de la corde MM′, c'est-à-dire la tangente au point M à la courbe MM′, est dans le plan TMS. Donc la tangente à toute courbe tracée sur la surface et passant par le point M est dans le plan TMS qui est alors le plan tangent à la surface au point M.

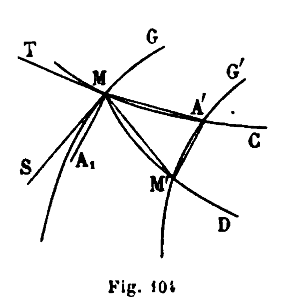


Fig. 104

Un cas d'exception sera celui où la génératrice est assujettie à passer par un point fixe et où le point M est justement ce point fixe. Dans ce cas le point A′ et le point M sont confondus; le point M′ étant sur la courbe G′, la corde MM′ a pour limite la tangente MS à la génératrice G. Si pendant le mouvement de la génératrice la droite MS engendre un plan, il y a un plan tangent à la surface au point M, mais s'il n'en est pas ainsi, le théorème est en défaut, les tangentes ne sont plus dans un même plan, mais forment un cône (84) (*).

(*) Cette démonstration est empruntée au Cours de Géométrie descriptive de M. Brisse (surfaces de révolution).

Ces points portent le nom de *points singuliers*.

Les surfaces engendrées par une droite, qu'on appelle *surfaces réglées*, et les *surfaces de révolution* (99), sont des cas particuliers des surfaces précédentes. En chaque point d'une surface réglée le plan tangent contient la génératrice, mais il n'est en général pas le même pour chaque point de la génératrice.

Remarque. — Pour déterminer le plan tangent en un point d'une surface, il suffira de construire les tangentes à deux courbes tracées sur la surface et passant par le point.

Normale. — On appelle *normale* en un point d'une surface la perpendiculaire au plan tangent en ce point qu'on appelle *point d'incidence* ou *pied* de la normale.

Tout plan passant par la normale s'appelle un *plan normal*.

Surfaces coniques et cylindriques.

84. On appelle *surface conique* toute surface engendrée par une droite assujettie à passer par un point fixe appelé *sommet*, et à rencontrer dans chacune de ses positions une courbe fixe qu'on nomme *directrice*. On donne le nom de *génératrice* à la droite qui engendre la surface, cette droite pouvant être d'ailleurs choisie dans l'une quelconque de ses positions.

On appelle *surface cylindrique* toute surface engendrée par une droite assujettie à rester parallèle à une direction fixe donnée, et à rencontrer dans chacune de ses positions une courbe fixe qu'on nomme *directrice*. On donne encore le nom de *génératrice* à la droite qui engendre la surface.

Une surface cylindrique est un cas particulier d'une surface conique ; c'est une surface conique dont le sommet est rejeté à l'infini dans une direction donnée.

On désigne encore ces deux espèces de surfaces, la première sous le nom de *cône*, et la seconde sous celui de *cylindre*.

Par chaque point d'une surface conique autre que le sommet passe une génératrice et une seule, car ce point et le sommet déterminent une droite. Il en est de même pour une surface cylindrique.

85. Théorème. — *Le plan tangent en un point d'une surface conique ou cylindrique est tangent à la surface en chaque point de la génératrice qui passe par le point considéré.*

Nous démontrerons le théorème pour une surface conique ; la démonstration serait analogue pour une surface cylindrique.

Soit S le sommet de la surface conique et supposons que la courbe D soit sa directrice (*fig.* 105). Désignons par A un point quelconque de la surface supposé tel qu'on puisse mener sur la surface du cône, par ce point, une courbe C qui soit traversée par la génératrice SA et qui admette au point A une seule tangente ; ces conditions peuvent être réalisées pour tout point de la surface n'offrant pas de particularité. Soit AT la tangente à la courbe C au point A. Le plan tangent à la surface conique au point A est déterminé par la droite AT et par la génératrice SA qui peut être considérée comme la tangente à la ligne droite AS choisie comme seconde ligne tracée par le point A sur la surface (84). D'autre part la génératrice SA rencontre la directrice en un point B. Soit BR la tangente à la directrice au point B. Le plan tangent à la surface au point B est le plan SBR. Si nous démontrons que le plan SAT se confond avec le plan SBR, nous aurons démontré que le plan tangent en un point quelconque A de la génératrice SA se confond avec le plan tangent au point B, c'est-à-dire que le plan tangent est le même tout le long de la génératrice SAB.

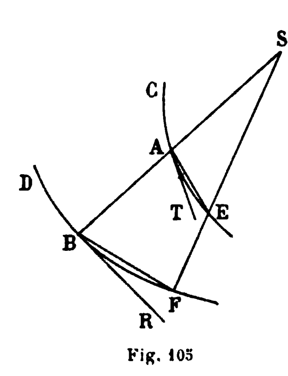


Fig. 105

Soit SEF une génératrice voisine de la génératrice SAB et rencontrant la courbe C au point E et la directrice D au point F. Menons les droites AE et BF. La droite AT est la position limite de la droite AE quand la génératrice SF vient se confondre, en se déplaçant sur la surface conique, avec la génératrice SB. Donc le plan SAE a pour position limite le plan SAT. Dans les mêmes conditions le plan SBF a pour position limite le plan SBR. Or les deux plans SAE, SBF sont confondus, donc leurs positions limites SAT, SBR sont aussi deux plans confondus.

Corollaire. — *La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe.*

Soient P le plan de projection, C une courbe de l'espace, *c* sa projection, MT la tangente à la courbe C au point M, *mt* la tangente à la courbe *c* au point *m* projection du point M (*fig.* 106). La courbe *c* est l'intersection par le plan P de la surface cylindrique qui a pour directrice la courbe C et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan P. Le plan tangent à cette surface cylindrique est le plan TM*m*. Ce plan, qui contient la droite M*m* perpendiculaire au plan P, est lui-même perpendiculaire au plan P ; son intersection avec le plan P est donc la projection de la tangente MT. Or, d'après le théorème précédent, le plan TM*m* est tangent à la surface cylindrique au point *m* ; donc la droite d'intersection de ce plan avec le plan P de la courbe *c* est la tangente à la courbe *c* au point *m*, et le corollaire est démontré.

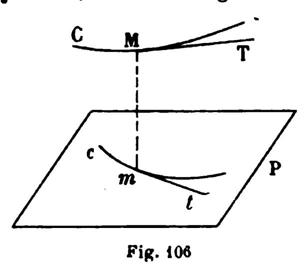


Fig. 106

Remarque. — Le corollaire précédent suppose que la tangente MT n'est pas perpendiculaire au plan P. Si elle l'était, sa projection serait un point et l'énoncé du corollaire n'aurait plus de signification.

86. Contours apparents. — Nous définirons d'abord ce qu'on entend par un cône ou un cylindre circonscrit à une surface.

Soient une surface S et un point A dans l'espace (*fig.* 107). Supposons le point A tel qu'il existe sur la surface S une courbe C en chacun des points de laquelle le plan tangent à la surface passe par le point A. Nous allons vérifier qu'en chaque point de la courbe C la surface S et le cône qui a pour sommet le point A et pour directrice la courbe C ont même plan tangent.

Soit M un point de la courbe C. Le plan tangent à la surface S au point M, passant par le point A, est déterminé par la droite AM et par la tangente MT au point M à la courbe C. Or ces deux droites déterminent le plan tangent au cône au point M (85).

Fig. 107

Le cône ayant pour sommet le point A et pour directrice la courbe C est dit *circonscrit* à la surface S.

Le point A peut être rejeté à l'infini dans une certaine direction. Tous les plans tangents à la surface S tout le long de la courbe sont alors parallèles à cette direction et le cône devient un cylindre ayant pour directrice la courbe C et dont les génératrices sont parallèles à la direction considérée. Ce cylindre est dit *circonscrit* à la surface S.

Imaginons que le point A soit l'œil d'un observateur regardant la surface S. La *courbe de contact* C du cône circonscrit à la surface ayant pour sommet le point A s'appelle le *contour apparent* de la surface.

Supposons que l'observateur soit à l'infini au-dessus du plan horizontal de projection (69). Le cône circonscrit à la surface ayant pour sommet l'œil de l'observateur devient un cylindre circonscrit dont les génératrices sont perpendiculaires au plan horizontal (*fig.* 108). La courbe de contact C de ce cylindre avec la surface S s'appelle le *contour apparent horizontal dans l'espace* de la surface. La courbe *c* suivant laquelle le plan horizontal H coupe ce cylindre se nomme le *contour apparent horizontal en projection* de la surface. C'est la projection horizontale du contour apparent dans l'espace.

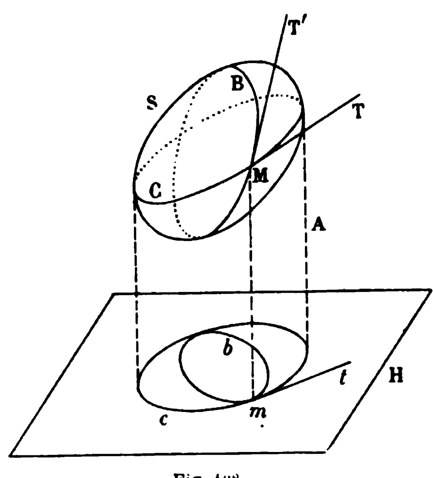


Fig. 108

Pour l'observateur que nous venons d'imaginer, le contour apparent horizontal dans l'espace sépare la surface en deux régions ; celle qui est la plus éloignée du plan horizontal est vue et cache l'autre région. Cette remarque sert à la ponctuation de la projection horizontale de la surface (69).

D'une manière analogue à ce qui précède on appelle *contour apparent vertical dans l'espace* d'une surface la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface, position limite du cône circonscrit qui a pour sommet l'œil de l'observateur, quand cet observateur s'éloigne à l'infini en avant du plan vertical ; ses génératrices sont perpendiculaires au plan vertical. Le *contour apparent vertical en projection* est la projection verticale du contour apparent vertical

dans l'espace. Pour un observateur situé à l'infini en avant du plan vertical (69) le contour apparent vertical dans l'espace sépare la région vue de la surface de la région cachée ; c'est la région la plus éloignée du plan vertical qui est vue. Cette remarque s'applique à la ponctuation de la projection verticale de la surface (69).

Théorème I. — *Soit* C *la courbe de contact du cylindre* A *circonscrit à la surface* S *et ayant ses génératrices perpendiculaires au plan de projection* H (*fig.* 108). *Si une courbe* B *tracée sur la surface* S *rencontre la courbe* C, *la projection de la courbe* B *est tangente en général à la projection de la courbe* C, *c'est-à-dire qu'elles ont même tangente en leurs points communs.*

Soient *b* et *c* les courbes projections des courbes B et C. Supposons que la courbe B rencontre la courbe C au point M qui se projette au point *m*. Le plan tangent à la surface S au point M est par hypothèse tangent au cylindre A ; il passe donc par la génératrice M*m* de ce cylindre et par suite il est perpendiculaire au plan H. Mais ce plan contient les tangentes MT, MT' aux deux courbes C, B, qui passent sur la surface par le point M ; ces deux tangentes étant dans un même plan perpendiculaire au plan H se projettent sur ce plan suivant une même droite *mt* qui est tangente à la fois aux projections *b* et *c* des courbes B et C (85).

Remarque. — Le théorème précédent suppose qu'aucune des deux tangentes MT, MT' n'est perpendiculaire au plan de projection.

Théorème II. — *Soient deux surfaces* S *et* S_1 *tangentes tout le long d'une courbe* L (*le plan tangent en chaque point de la courbe* L *est le même pour les deux surfaces*). *Soient* C *la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface* S *et ayant ses génératrices perpendiculaires au plan de projection* H, *et* M *un point d'intersection des deux courbes* C *et* L. *Au point* M *le plan tangent à la surface* S_1 *est perpendiculaire au plan* H. *En outre, la projection de l'une des courbes formées sur la surface* S_1 *par les points de cette surface où le plan tangent est perpendiculaire au plan* H, *et les projections des courbes* C *et* L *sont tangentes au point m projection du point* M (*fig.* 109).

Au point M commun aux courbes C et L le plan tangent à la sur-

face S est perpendiculaire au plan H comme en tout point de la courbe C ; or ce plan tangent est aussi tangent à la surface S_1 puisque le point M est sur la courbe L. Le point M appartient donc à l'ensemble des points de la surface S_1 auxquels le plan tangent à cette surface est perpendiculaire au plan de projection ; il est donc en général sur la courbe de contact C_1 d'un cylindre circonscrit à la surface S_1 et ayant ses génératrices perpendiculaires au plan H. Cela posé, les projections des courbes C et L sont tangentes au point *m* d'après le théorème précédent, et il en est de même des projections des courbes L et C_1. Donc les projections des trois courbes sont tangentes au point *m*.

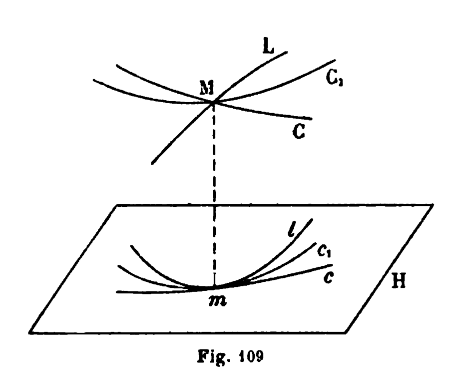


Fig. 109

Remarque. — Les deux théorèmes précédents s'appliquent aux cas où les courbes C et C_1 sont les contours apparents dans l'espace des surfaces S et S_1. D'après le premier :

Si une courbe tracée sur une surface rencontre le contour apparent dans l'espace de la surface, la projection de cette courbe est tangente au contour apparent en projection.

Il est bon d'ajouter d'ailleurs que la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface, et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de projection, ne fait pas nécessairement partie du contour apparent de la surface. Par exemple, si on considère la surface engendrée par la courbe G tournant autour de la droite XY, supposée verticale (*fig.* 120), en chaque point de la circonférence engendrée par le point D, le plan tangent est perpendiculaire au plan horizontal, et cependant cette circonférence ne fait pas partie du contour apparent horizontal ; elle est entièrement cachée pour l'observateur par la partie supérieure de la surface.

CHAPITRE III

PLANS TANGENTS AUX SURFACES CONIQUES ET CYLINDRIQUES CONTOURS APPARENTS. SECTIONS PLANES.

I. — Plans tangents aux surfaces coniques et cylindriques.

87. **Plan tangent en un point d'une surface conique.** — Supposons la surface donnée par son sommet S et par sa directrice D (*fig.* 105). Soit A un point donné sur la surface. Proposons-nous de construire le plan tangent à la surface en ce point. On joint le point S au point A par une ligne droite qui, étant une génératrice de la surface, rencontre la directrice en un point B. On détermine ce point B et on construit la tangente BR à la directrice D au point B. Le plan déterminé par les deux droites SB et BR est le plan tangent à la surface au point A (85).

On voit que la solution suppose qu'on sait mener la tangente en un point de la projection de la directrice.

Si la directrice est donnée par ses projections sur deux plans rectangulaires ou par sa projection cotée, on exécute sans difficulté les opérations successives que nous venons d'exposer.

88. **Problème.** — *La directrice d'un cône est une circonférence située dans un plan* P *donné par son échelle de pente, ayant pour centre le point* O *de cote* 3 *et un rayon égal à* 1,70. *Son sommet est le point* S *de cote* 7,5. *On donne la projection horizontale* a *d'un point* A *de*

la surface du cône (fig. 110). Trouver la cote du point A *et construire le plan tangent à la surface en ce point.*

Nous allons construire les génératrices du cône qui passent par le point A. Elles sont à l'intersection de la surface conique et du plan vertical qui a pour trace horizontale la droite *sa*, puisque le point A doit être sur la verticale passant par le point *a* et que les génératrices passent par le point S. Ce plan vertical coupe le plan P de la directrice suivant une droite qui coupe la directrice en deux points M et N. Les deux génératrices en question sont les droites SM et SN. Il n'y a plus qu'à déterminer les cotes des points de ces deux droites qui se projettent au point *a*; ce sont les cotes des deux points de la surface conique qui ont pour projection le point *a*.

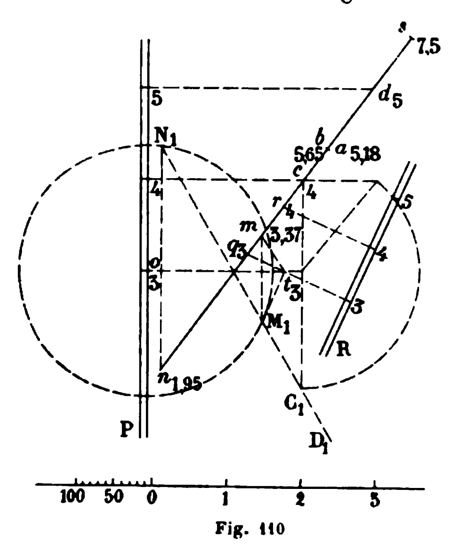


Fig. 110

Nous commençons par déterminer l'intersection CD du plan vertical *sa* et du plan P à l'aide des horizontales de cotes 4 et 5 (55). La construction qui consiste à prendre les points d'intersection de la droite CD avec la directrice doit être effectuée dans le plan P, par conséquent nous rabattons ce plan sur le plan horizontal. La directrice se rabat suivant une circonférence ayant pour centre le rabattement du point O et pour rayon 1,70. En rabattant le plan P autour de l'horizontale de cote 3, le centre de la circonférence est le point *o* lui-même. La droite CD se rabat suivant la droite C_1D_1 et les points M et N se rabattent aux points M_1 et N_1 d'intersection de la droite C_1D_1 avec la circonférence. Les deux points M_1 et N_1 se relèvent, le premier au point *m* coté 3,37, le second au point *n* coté 1,95. Nous déterminons enfin la cote 5,18 du point A de la génératrice SM qui se projette au point *a*, et la cote 5,65 du point B de la génératrice SN qui se projette au même point, que nous avons aussi affecté de la lettre *b* pour bien distinguer les deux points différents.

Proposons-nous maintenant de construire le plan tangent à la surface au point A.

Au point M_1, rabattement du point M où la génératrice SA rencontre la directrice, nous menons la tangente M_1t à la circonférence. Le point t est, sur l'horizontale de cote 3 du plan P, le point de la tangente à la directrice qui a pour cote 3. La tangente à la directrice au point M est la droite MT et le plan tangent est déterminé par les deux droites SM et MT. Nous avons déterminé le point q de cote 3 de la droite SM. La droite qt est l'horizontale de cote 3 du plan tangent. La parallèle à cette droite menée par le point r de cote 4 de la droite SM est l'horizontale de cote 4 du même plan. Nous en déduisons son échelle de pente R.

89. Les mêmes constructions s'appliquent à une surface cylindrique en remarquant que c'est une surface conique dont le sommet est rejeté à l'infini dans la direction des génératrices.

Exemple. — *La directrice d'une surface cylindrique est une circonférence située dans le plan vertical dont la trace horizontale est la droite* P (*fig.* **111**). *Son centre est le point* O *de cote* 3,5 *et son rayon est égal à* 2,8. *Les génératrices sont parallèles à la droite* GH. *On donne la projection* a *d'un point de la surface ; trouver sa cote et construire le plan tangent en ce point.*

La directrice étant dans un plan vertical, nous prendrons ce plan P comme plan vertical de projection ; la ligne de terre xy est la droite P. Nous construisons la projection verticale C′ de la directrice ; c'est une circonférence qui a pour centre la projection verticale o' du point O et dont le rayon est égal à 2,8. Nous construisons aussi la projection verticale $g'h'$ de la parallèle aux génératrices. La trace horizontale du plan vertical qui contient la génératrice passant par le point cherché est la parallèle aQ à la droite gh menée par le point a ; sa trace verticale αQ′ coupe la directrice aux deux points (b, b'), (d, d'). Il y a donc deux génératrices se projetant horizontalement suivant la droite aQ ; leurs projections verticales $b'e'$, $d'f'$ sont les parallèles à la droite $g'h'$ menées par les points b' et d'. En menant la ligne de rappel du point a, on obtient les deux points (a, a'), (m, m') qui répondent à la question. Leurs cotes sont 4,15 et 1,15.

Proposons-nous de construire le plan tangent au point (a, a'). Il contient la tangente $(bt, b't')$ à la directrice au point (b, b') ; comme elle est dans le plan vertical, c'est la trace verticale du plan tangent. Il contient aussi la génératrice $(be, b'e')$, et par suite sa trace horizontale est la droite te, puisque le point (e, e') est la trace horizontale de la génératrice. Enfin le plan tangent étant déterminé par ses traces, on en déduit son échelle de pente R.

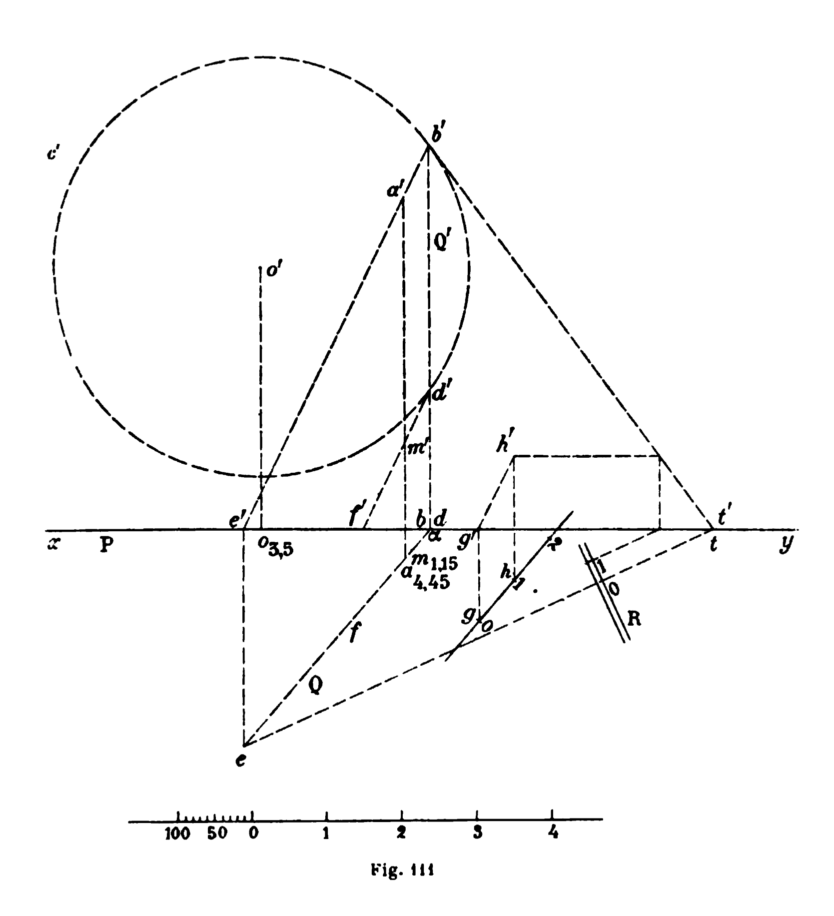


Fig. 111

90. Problème. — *Mener par un point un plan tangent à une surface conique ou cylindrique.*

Supposons qu'il s'agisse d'une surface conique dont la directrice soit

plane. Soient S le sommet de la surface, D la directrice située dans le plan P et A le point par lequel on doit mener le plan tangent (*fig.* 112). Traçons la droite SA et déterminons son point d'intersection B avec le plan de la directrice. Menons par le point B la tangente BC à la directrice. Le plan SCB est tangent à la surface puisqu'il contient la génératrice SC et la tangente BC à la directrice, et il passe par le point A car il contient la droite SB. C'est donc un plan répondant à la question. Le problème a autant de solutions qu'on peut mener par le point B de tangentes à la directrice.

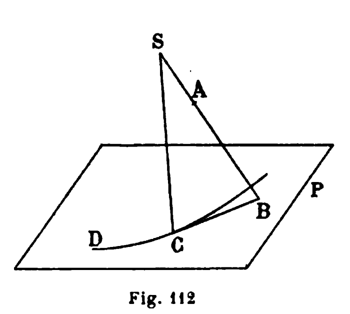


Fig. 112

Le problème pourrait encore s'énoncer : *mener à une surface conique un plan tangent par une droite* SB *passant par le sommet.*

Si la surface était cylindrique, la droite SB serait remplacée par une parallèle aux génératrices menée par le point A.

91. Problème. — *Mener à une surface conique un plan tangent parallèle à une droite donnée.*

Supposons la directrice D du cône située dans un plan P, soient S son sommet et Δ la droite à laquelle le plan tangent doit être parallèle (*fig.* 113). Menons par le sommet du cône une droite SA parallèle à la droite Δ. Déterminons son point d'intersection A avec le plan de la directrice, et par le point A menons la tangente AB à la directrice. Le plan SAB est tangent à la surface et parallèle à la droite Δ puisqu'il contient la droite SA qui lui est parallèle. Il y a autant de solutions qu'on peut mener à la directrice de tangentes par le point A.

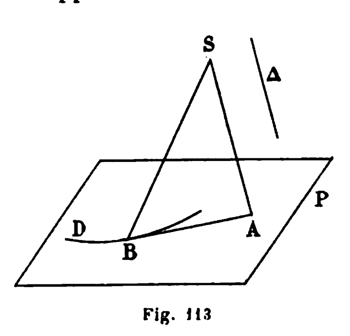


Fig. 113

92. Problème. — *Mener à une surface cylindrique un plan tangent parallèle à une droite donnée.*

Soient D la directrice de la surface située dans un plan P, G la

direction des génératrices du cylindre, et Δ la droite donnée (*fig.* 114). On commence par déterminer la trace sur le plan P d'un plan parallèle à la fois aux génératrices du cylindre et à la droite Δ. Pour cela, par un point A de l'espace on mène des parallèles à la droite Δ et à la direction des génératrices du cylindre; soient AB et AC. On détermine l'intersection BC du plan BAC avec le plan P. Si on mène à la directrice la tangente EF parallèle à la droite BC, cette tangente et la génératrice EH déterminent un plan tangent à la surface et parallèle au plan ABC et par suite à la droite Δ.

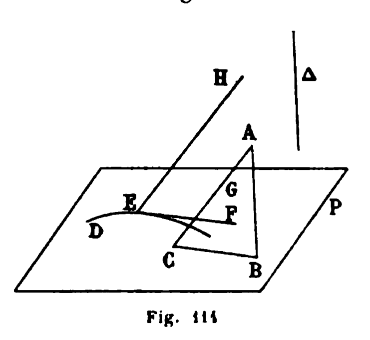


Fig. 114

Le problème comporte autant de solutions qu'il y a de tangentes à la directrice parallèles à la droite BC.

Exemple. — *La directrice de la surface cylindrique est une circonférence située dans le plan* P *donné par son échelle de pente, son centre est le point* O *de cote* 4 *et son rayon est égal à* 1,5 ; *la direction des génératrices est la droite* AG, *et la direction donnée la droite dont l'échelle de pente est* γδ (*fig.* 115.)

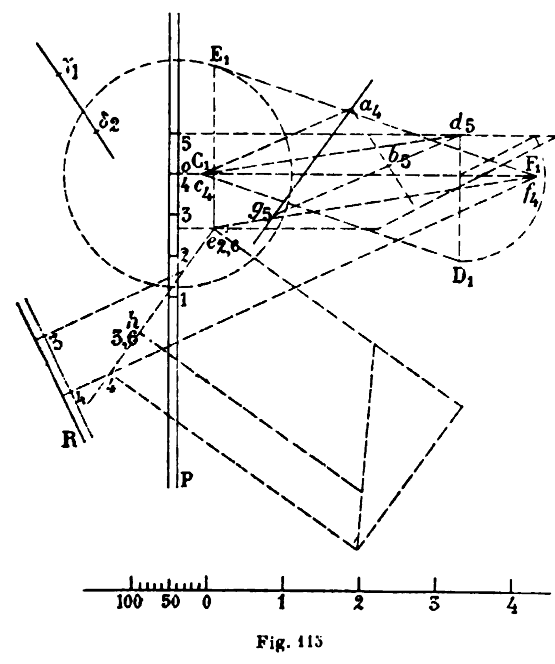


Fig. 115

Par le point A de cote 4 de la droite AG nous menons la droite AB parallèle à la droite γδ. Nous déterminons l'intersection CD du plan ABG avec le plan P.

La construction des tangentes à la directrice parallèles à la droite CD doit être effectuée dans le plan P, alors nous rabattons ce plan autour de son horizontale 4; le rabattement de la droite CD est la droite C_1D_1. Le rabattement de la directrice est la circonférence ayant pour centre le point *o* et pour rayon 1,5. Nous menons à cette circonférence la tangente E_1F_1 parallèle à la droite C_1D_1; elle se relève suivant la droite EF parallèle à la droite CD. La droite EF et la génératrice EH parallèle à la droite AG et passant par le point E déterminent un plan répondant à la question. Son échelle de pente est la droite R.

La seconde tangente à la circonférence parallèle à la droite C_1D_1 donnerait un second plan répondant à la question.

II. — Contours apparents.

93. Soient une surface conique ayant pour sommet le point S et pour directrice la courbe C et un point A hors de la surface (*fig.* 116). Un plan ASB tangent à la surface et passant par le point A est tangent à la surface en chaque point de la génératrice SB qui passe par l'un des points de contact du plan tangent et de la surface. Par conséquent le cône circonscrit à la surface conique et ayant pour sommet le point A (86) se compose d'un certain nombre de plans passant par la droite SA et tangents à la surface conique suivant des génératrices telles que la génératrice SB. Il en sera de même si l'on suppose que le point A s'éloigne indéfiniment au-dessus du plan horizontal dans une direction perpendiculaire à ce plan. La droite SA devient alors perpendiculaire au plan horizontal et le cône circonscrit qui avait pour sommet le point A devient un cylindre circonscrit (86). Ce cylindre se décompose d'ailleurs en un certain nombre de plans tangents à la surface conique qui, passant par la droite SA, sont perpendiculaires au plan horizontal. Les génératrices suivant lesquelles ces plans sont tangents à la surface constituent le contour apparent horizontal dans l'espace de la surface. La directrice ren-

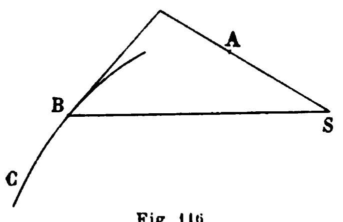


Fig. 116

contre ces génératrices dans l'espace, sa projection horizontale est donc tangente à leurs projections horizontales (86); comme d'ailleurs les projections horizontales des génératrices passent par la projection horizontale du sommet, il résulte de ce qui précède que : *lorsqu'on connaît la projection horizontale de la directrice, on obtient le contour apparent horizontal en projection de la surface conique en menant par la projection horizontale du sommet des tangentes à la courbe projection horizontale de la directrice.*

Le contour apparent vertical en projection s'obtiendrait de même en menant par la projection verticale du sommet des tangentes à la projection verticale de la directrice.

Exemple. — *Une surface conique a pour sommet le point* (s, s') *donné par ses projections sur deux plans rectangulaires et pour directrice une courbe* C *donnée dans le plan horizontal* (*fig.* 117). *Construire :* 1° *les contours apparents de la surface;* 2° *une génératrice quelconque;* 3° *le plan tangent suivant cette génératrice.*

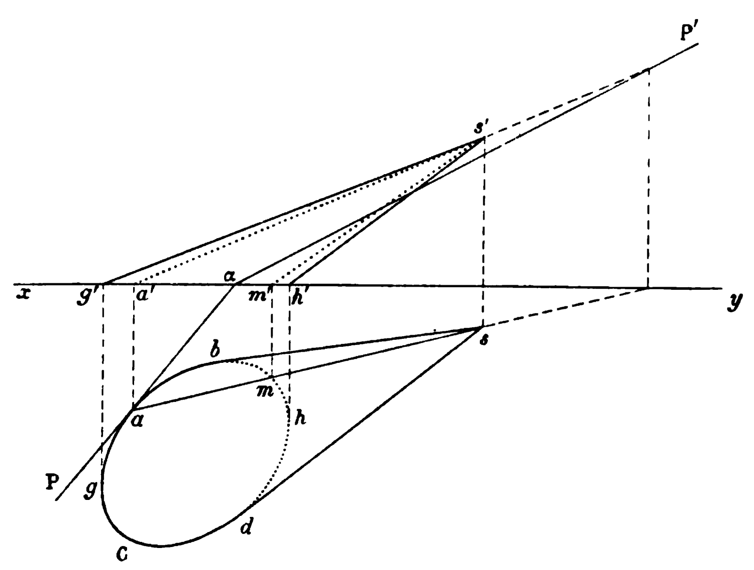


Fig. 117

1° Le contour apparent horizontal se compose des tangentes menées par le point s à la courbe C. Le contour apparent vertical se compose des projections verticales $s'g'$, $s'h'$ des génératrices qui coupent

la directrice aux points où les tangentes à cette courbe sont perpendiculaires au plan vertical, car les plans $s'g'g$, $s'h'h$, tangents à la surface sont perpendiculaires au plan vertical.

2° Pour avoir une génératrice quelconque, nous nous donnerons arbitrairement sa projection horizontale sa par exemple. Elle coupe la directrice en un point projeté horizontalement en a et verticalement au point a'. Sa projection verticale est la droite $s'a'$.

3° Le plan tangent suivant la génératrice $(sa, s'a')$ est déterminé par la génératrice et par la tangente αP à la directrice au point a. Cette dernière droite est la trace horizontale du plan tangent. Nous obtenons sa trace verticale en joignant le point α à la trace verticale de la droite $(sa, s'a')$. C'est la droite $\alpha P'$.

Ponctuation. — En projection horizontale le contour apparent est vu, car les génératrices qui le composent ne sont coupées dans l'espace qu'en un seul point par les verticales qui se projettent horizontalement sur les droites sb, sd. Quant à la directrice C, les points b et d séparent la partie vue de la partie cachée (86). Pour distinguer quelle est celle des deux parties bgd, bhd qui est vue, nous comparons deux génératrices ayant même projection horizontale, par exemple $(sa, s'a')$ et $(sm, s'm')$. La comparaison de leurs projections verticales nous montre que c'est la génératrice $(sa, s'a')$ qui est la plus élevée et qui, par suite, cache l'autre. Donc sur la directrice c'est la région bgd qui est vue tandis que la région bhd est cachée. En projection verticale, le contour apparent $s'g'$, $s'h'$ est vu. Les génératrices $(sa, s'a')$, $(sm, s'm')$ sont cachées, car leur projection horizontale coupe la directrice aux points a et m situés sur la région gbh de cette directrice.

Tout ce que nous venons de dire d'une surface conique s'applique à une surface cylindrique : dans ce cas le contour apparent horizontal par exemple s'obtient en menant à la courbe projection horizontale de la directrice des tangentes parallèles à la direction des projections horizontales des génératrices.

94. Il peut arriver que la directrice soit déterminée mais qu'on ne connaisse pas sa projection ; il n'est pas nécessaire de la construire pour obtenir le contour apparent. Il suffit de remarquer que les plans tangents suivant les génératrices qui constituent le contour apparent dans l'espace sont parallèles à une direction perpendiculaire au plan

de projection ; on est donc ramené à déterminer les plans tangents à la surface parallèles à une direction connue (91).

Exemple. — *On donne les projections cotées de trois points* A, B, C, *et la projection cotée d'un point* S (*fig.* 118). *Construire le contour apparent horizontal de la surface conique qui a pour sommet le point* S *et pour directrice la circonférence circonscrite au triangle* ABC.

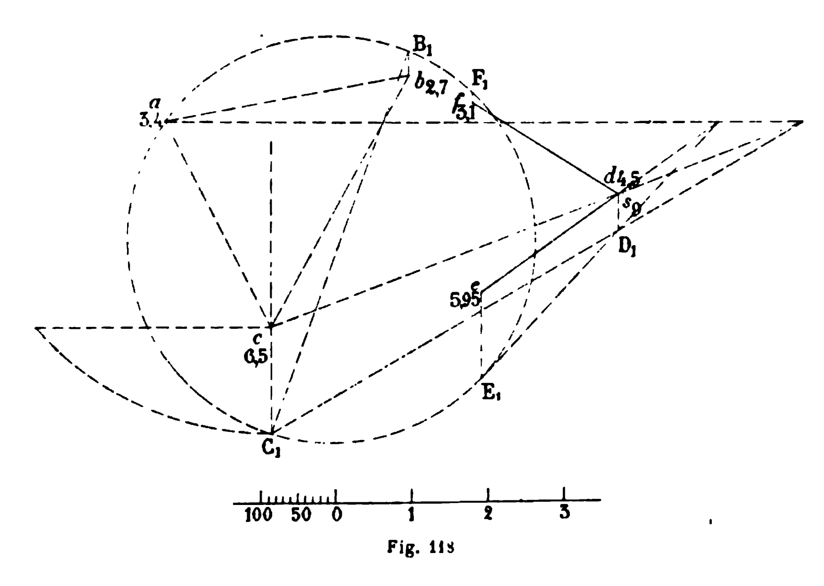


Fig. 118

Nous allons mener à la surface conique des plans tangents parallèles à une verticale. Par le point S nous menons la verticale dont nous déterminons le point d'intersection D avec le plan ABC de la directrice. Dans le plan ABC nous devons mener par le point D coté 4,5 les tangentes à la directrice qui est située dans ce plan. Nous rabattons alors le plan ABC autour de son horizontale de cote 3,4. Le triangle ABC se rabat suivant le triangle aB_1C_1 et la directrice suivant la circonférence circonscrite à ce triangle. Par le rabattement D_1 du point D nous menons les tangentes D_1E_1, D_1F_1 à cette circonférence. Nous relevons les points E_1 et F_1 aux points projetés en *e* et *f* et ayant pour cotes 5,95 et 3,1. Les droites *se*, *sf* constituent le contour apparent en projection de la surface conique. Les points *e* et *f* sont les points où ces deux droites sont tangentes à la projection de la circonférence directrice de la surface conique.

III. — Section plane.

95. Détermination d'un point de la section. — Une surface conique ou cylindrique étant un ensemble de droites, pour obtenir un point quelconque de la ligne d'intersection d'une telle surface et d'un plan, on déterminera l'intersection de l'une quelconque des génératrices et du plan. En recommençant la construction pour un certain nombre de génératrices, on obtiendra un certain nombre de points de la section et l'on n'aura plus qu'à les joindre par un trait continu.

Au lieu de déterminer beaucoup de points dont le rapprochement pourrait rendre l'exactitude douteuse à cause du nombre des lignes employées, il est préférable d'en déterminer seulement quelques-uns avec toute la précision possible en ayant soin de choisir avant tout les points occupant sur la section une position particulière, par exemple les points sur les contours apparents, le point le plus haut, le point le plus bas. En outre, quand on a déterminé un point de la section, on a soin de construire la tangente à la courbe en ce point, elle indique la forme de la courbe dans le voisinage du point.

Tangente en un point. — La tangente en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces doit être à la fois dans les plans tangents à chaque surface en ce point puisque la courbe d'intersection est tracée sur chacune des surfaces ; *c'est donc l'intersection des plans tangents aux deux surfaces au point considéré*. Dans le cas d'une section plane, l'une des deux surfaces étant un plan, le plan tangent à cette surface est le plan lui-même et la *tangente en un point de la section plane est l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la surface au point dont il s'agit*. Le problème est donc ramené à la détermination de l'intersection de deux plans.

Points sur les contours apparents. — On les détermine en prenant les points d'intersection du plan sécant et des génératrices de contour apparent. En ces points la projection de la section est tangente aux projections des génératrices de contour apparent ; ils séparent sur la courbe les parties vues des parties cachées (86).

Point le plus haut. Point le plus bas. — Ces points sont caractérisés

par ce fait que les tangentes à la section en ces points doivent être horizontales. La tangente en un point étant située dans le plan sécant, les tangentes en question doivent être parallèles aux horizontales du plan sécant. Le plan tangent à la surface en chacun de ces points passant par la tangente à la section en ce point sera par conséquent parallèle aux horizontales du plan sécant. On mènera par suite à la surface les plans tangents parallèles à la direction des horizontales du plan sécant, et les génératrices suivant lesquelles ces plans sont tangents à la surface donneront par leur intersection avec le plan sécant le point le plus haut et le point le plus bas de la section.

Ajoutons que nous avons supposé la surface telle que la section n'ait que deux points où les tangentes soient parallèles à la direction des horizontales du plan sécant ; s'il y en a un plus grand nombre, la construction donnera, outre le point le plus haut et le point le plus bas, tous les points où les tangentes sont parallèles au plan horizontal.

On peut d'une manière analogue déterminer les points où les tangentes à la section sont parallèles au plan vertical et en particulier le point le plus rapproché et le point le plus éloigné du plan vertical.

Remarque. — Quand l'épure se rapporte à deux plans de projection, il est bon de déterminer le point le plus à droite et le point le plus à gauche de la section par rapport à l'observateur qui, debout sur la partie antérieure du plan horizontal, regarde la partie supérieure du plan vertical. Les tangentes en ces points sont situées dans des plans de profil puisque leurs projections doivent être perpendiculaires à la ligne de terre ; elles doivent donc être parallèles à l'intersection du plan sécant et d'un plan de profil. On obtiendra donc les génératrices qui déterminent les points cherchés en menant à la surface des plans tangents parallèles à l'intersection du plan sécant et d'un plan de profil.

Points à l'infini. — S'il existe sur la surface des génératrices parallèles au plan sécant, les points de la section qui correspondent à ces génératrices sont rejetés à l'infini. On obtient ces génératrices sur une surface conique en menant par le sommet un plan parallèle au plan sécant. Un tel plan passant par le sommet coupe la surface suivant des génératrices, car les droites qui joignent le sommet aux points d'intersection du plan sécant et de la directrice sont à la fois sur la

surface et dans le plan sécant. Si l'on construit les plans tangents à la surface suivant ces génératrices, les droites d'intersection de ces plans et du plan sécant sont les positions limites des tangentes à la section quand le point de contact s'éloigne à l'infini sur la génératrice correspondant au plan tangent considéré. On les appelle les *asymptotes* de la courbe.

Si la surface est cylindrique, comme la direction des génératrices est fixe, ou les génératrices sont parallèles au plan sécant qui ne peut alors couper la surface que suivant des génératrices, ou bien la direction des génératrices n'est pas parallèle au plan sécant et chacune d'elles rencontre le plan sécant en un point à distance finie.

Si cependant la directrice avait elle-même des points à l'infini, la section présenterait des points à l'infini sur les génératrices rejetées à l'infini. En supposant la directrice plane, la section aurait des points à l'infini dans la direction de l'intersection du plan de la directrice et d'un plan parallèle aux génératrices du cylindre. Dans ce cas le plan tangent au cylindre est lui-même rejeté à l'infini et il n'y a pas d'asymptote correspondant à ces points.

Grandeur de la section. — Si l'on veut avoir la grandeur de la section, il suffit de rabattre le plan sécant sur un plan horizontal ou un plan de front.

96. Nous allons donner un exemple de la construction d'une section plane d'une surface conique dont la directrice est dans le plan horizontal.

Problème. — *On donne dans le plan de comparaison une courbe* D *qui est la directrice d'une surface conique dont le sommet est le point* S *donné par sa projection* s *cotée* 6. *Construire la section de cette surface par le plan* P *donné par son échelle de pente* (*fig.* 119).

Détermination d'un point quelconque. — Choisissons arbitrairement une génératrice S*a*, le point *a* ayant pour cote zéro. Nous nous donnons arbitrairement les horizontales de cotes 1 et 2 d'un plan passant par la droite S*a*, et à l'aide des horizontales de mêmes cotes du plan P nous obtenons le point *m* d'intersection de la génératrice S*a* et du plan P (56). La cote du point de la section projeté au point *m* est celle du point de l'arête S*a* qui se projette en ce point ; elle est égale à 3.

Tangente au point *m*. — Le plan tangent à la surface suivant l'arête S*a* a pour trace horizontale la tangente à la courbe D au point *a*. Cette tangente coupe la trace horizontale du plan P au point *t* qui appartient à l'intersection du plan tangent et du plan sécant. La tangente cherchée est donc la droite *mt*.

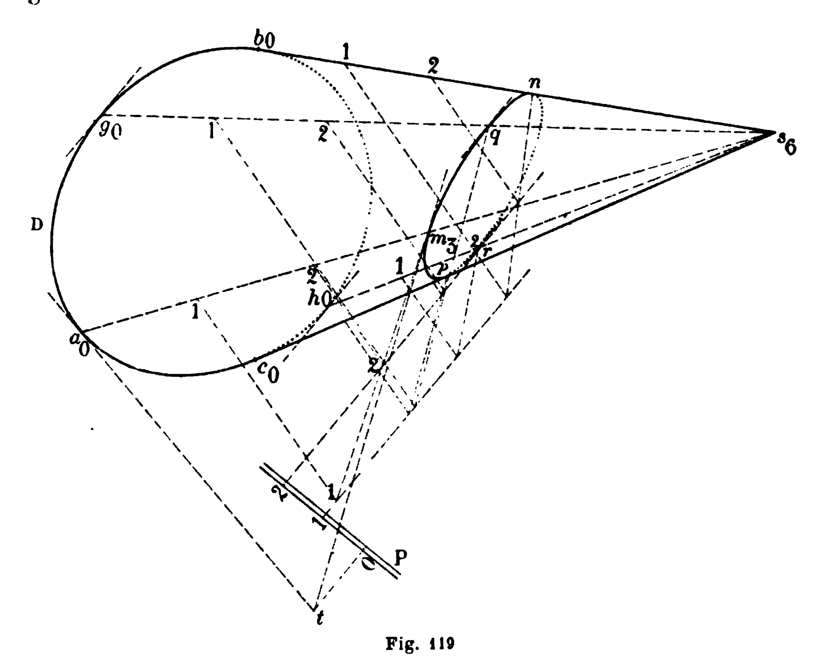


Fig. 119

Points sur les contours apparents. — Les génératrices de contour apparent ont pour projections les tangentes *sb*, *sc*, menées par le point *s* à la courbe D (93). Leurs points d'intersection avec le plan P déterminés à l'aide des horizontales de cotes 1 et 2 sont les points *n* et *p*. En ces points la courbe est tangente aux projections des génératrices S*b* et S*c* (95).

Point le plus haut. Point le plus bas. — Soient *g* et *h* les points où les tangentes à la directrice sont parallèles aux horizontales du plan P. Nous déterminons les points *q* et *r* d'intersection des génératrices S*g*, S*h* avec le plan P. En ces points les tangentes sont parallèles aux horizontales du plan P. Le point *q* qui a la cote la plus élevée est le point le plus haut et le point *r* le point le plus bas.

Pour joindre les points *m*, *q*, *n*, *r*, *p* dans l'ordre convenable, on

imagine qu'un point mobile parte du point *a* et décrive la directrice D. Il rencontrera dans un certain ordre les génératrices employées. On joindra dans le même ordre les points correspondants de la section.

Ponctuation. — Les points *n* et *p* séparent sur la section la partie vue et la partie cachée. Pour décider laquelle des deux est la partie vue, on prend deux génératrices S*a*, S*k* ayant même projection horizontale *sa* ; le point de la génératrice S*a* qui se projette horizontalement au point *k* a une cote plus élevée que le point *k* dont la cote est zéro ; donc la génératrice S*a* cache la génératrice S*k*. La portion *prmqn* de la section est vue tandis que l'autre portion est cachée. De même, sur la directrice, c'est la partie *cab* qui est vue.

97. Cas où le plan sécant coupe la surface suivant des génératrices. — C'est le cas où le plan sécant passe par le sommet de la surface si elle est conique ; il est parallèle aux génératrices, si elle est cylindrique. Dans ce cas on détermine les points d'intersection du plan sécant et de la directrice. La section se compose des génératrices qui passent par ces points. Si la directrice de la surface est plane, on obtiendra les points où elle coupe le plan sécant en déterminant l'intersection du plan sécant et du plan de la directrice et prenant les points où cette droite coupe la directrice.

98. Intersection d'une surface conique ou cylindrique et d'une droite. — S'il s'agit d'une surface conique, on mène un plan par le sommet et par la droite ; on détermine les génératrices d'intersection de ce plan et de la surface, et les points cherchés sont les points où la droite donnée coupe ces génératrices.

Dans le cas d'une surface cylindrique, on mène par la droite un plan parallèle aux génératrices de la surface et on achève comme pour la surface conique.

EXERCICES

1. — Mener par un point une droite rencontrant une droite et une circonférence données. (X)

2. — On donne un plan P incliné de 40° sur le plan de comparaison

par sa trace horizontale. On donne un point O de ce plan ayant pour cote 4. Le point O est le centre d'une circonférence située dans le plan et ayant un diamètre de 54^{mm}. Cette circonférence est la directrice d'un cône droit situé au-dessus du plan P et dont la hauteur est égale à 108^{mm}.

1° Construire la projection cotée du cône.

2° Trouver ses points de rencontre avec une horizontale donnée passant par le milieu de la hauteur.

3° Mener le plan tangent au cône par l'un de ces deux points de rencontre.

3.— On donne les projections cotées de deux parallèles. L'une engendre un cylindre, en tournant autour de l'autre. Graduer la projection donnée d'une génératrice. (N)

4. — Tracer une horizontale rencontrant deux droites données et ayant une longueur donnée. (N)

5.— On donne un plan vertical et dans ce plan une circonférence. On donne la projection horizontale d'un point appartenant au cône qui a pour directrice la circonférence et pour sommet un point donné dans le plan de comparaison. Déterminer la cote de ce point et le plan tangent en ce point. Faire la projection verticale sur le plan vertical donné.

6. — Un cylindre a pour directrice une circonférence donnée située dans un plan représenté par son échelle de pente. Ses génératrices sont parallèles à une horizontale donnée. On le coupe par un plan perpendiculaire aux génératrices. Construire la projection sur ce plan de la section obtenue (section droite).

7. — Un cône a pour directrice une circonférence donnée située dans un plan horizontal de cote donnée. Construire les points d'intersection de sa surface et d'une horizontale donnée.

8. — Un cylindre a pour directrice une circonférence située dans un plan horizontal de cote donnée et ses génératrices ont une direction arbitraire donnée. Construire son contour apparent horizontal, et son contour apparent vertical sur un plan vertical donné.

CHAPITRE IV

NOTIONS SUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION. PLAN TANGENT. SECTION PLANE.

I. — Notions sur les surfaces de révolution.

99. Définitions. — On appelle *surface de révolution* toute surface engendrée par une ligne plane ou gauche tournant autour d'une droite fixe qu'on nomme *axe* de la surface. La ligne qui engendre la surface s'appelle une *génératrice* de cette surface.

Pendant le mouvement de la génératrice, chacun de ses points décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe. Ces circonférences situées sur la surface et dont les plans sont parallèles s'appellent les *parallèles* de la surface.

Toute courbe section de la surface par un plan passant par l'axe est appelée *méridienne* ou *méridien* de la surface.

La surface peut être considérée comme engendrée par un de ses méridiens tournant autour de l'axe. On peut encore la considérer comme engendrée par un de ses parallèles assujetti à se mouvoir de telle sorte que son plan reste perpendiculaire à l'axe, que son centre soit sur l'axe, et que dans chacune de ses positions; il rencontre l'une des positions de la génératrice supposée fixe.

100. Théorème. — 1° *Le plan tangent en un point d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan du méridien qui passe par ce point ;* 2° *les plans tangents à une surface de révolution aux différents points d'un même parallèle coupent l'axe de la surface au même point.*

Soit XY l'axe d'une surface de révolution (*fig.* 120).

1° Soit A un point de la surface. Considérons le méridien G et le parallèle ABC qui passent par le point A. Le plan tangent à la surface au point A est déterminé par la tangente AT au méridien et la tangente AZ au parallèle. Menons le rayon OA du parallèle, c'est l'intersection du plan du méridien et du plan du parallèle ; or la droite AZ est perpendiculaire à la droite OA, comme tangente à la circonférence, et à la droite XY, car cette droite est perpendiculaire au plan ABC qui passe par AZ. La droite AZ est donc perpendiculaire au plan du méridien qui contient les droites OA et XY. Donc le plan tangent qui passe par la droite AZ est perpendiculaire au plan du méridien.

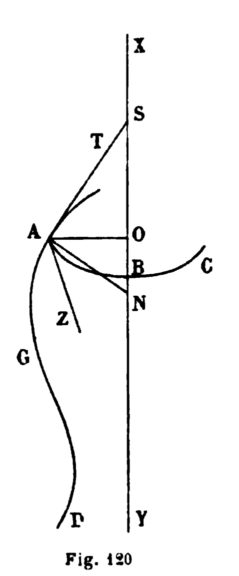


Fig. 120

2° La droite AT qui est dans le plan du méridien rencontre la droite XY en un point S. Si l'on suppose que le point A décrive le parallèle ABC, la droite SA engendre un cône de révolution autour de l'axe XY ayant pour sommet le point S et pour directrice le parallèle ABC. Le plan tangent à ce cône au point A est le plan TAZ; il se confond donc avec le plan tangent à la surface au point A. Le cône est circonscrit à la surface le long du parallèle ABC. Il en résulte que les plans tangents à la surface en chaque point du parallèle ABC passent par le point S.

Corollaire. — *Les normales à la surface en tous les points d'un parallèle coupent l'axe au même point.*

La normale à la surface au point A est perpendiculaire au plan TAZ, elle est donc dans le plan méridien qui est perpendiculaire au plan TAZ ; par suite elle rencontre l'axe XY en un point N. Quand le méridien engendre la surface, le point A décrit le parallèle; comme d'ailleurs la droite AT coupe l'axe au point fixe S et que la droite AN est dans chacune de ses positions perpendiculaire à la droite AT, le point N reste aussi fixe.

Remarque. — Un plan passant par l'axe est perpendiculaire au plan de tout parallèle, et comme il passe par son centre, le parallèle est symétrique par rapport à ce plan. Il en résulte qu'une surface de

révolution est symétrique par rapport au plan de l'un quelconque de ses méridiens.

II. — Plan tangent.

101. Dans ce qui suit, nous supposerons l'axe de la surface de révolution vertical.

Problème. — *Une surface de révolution étant déterminée par son axe supposé vertical et l'un de ses méridiens : 1° Trouver la cote d'un point de la surface donné par sa projection horizontale ; 2° construire le plan tangent et la normale à la surface en ce point.*

1° Soit a l'axe de la surface (*fig.* 121). Prenons comme plan vertical le plan du méridien donné. Soit xy la trace de ce plan vertical. La projection verticale de l'axe est la droite $a'b'$. Le méridien d'une surface de révolution dont le plan est parallèle au plan vertical s'appelle *méridien principal* ; dans le cas actuel, le méridien qui est supposé engendrer la surface est le méridien principal, il est dans le plan vertical et se confond avec sa projection verticale G'. Soit m la projection horizontale du point de la surface dont on cherche la cote. Le parallèle qui passe par le point de la surface se projetant au point m se projette horizontalement suivant une circonférence qui lui est égale puisque son plan est parallèle au plan horizontal ; il se projette donc suivant la circonférence qui a pour centre le point a et pour rayon am. De plus le parallèle considéré ren-

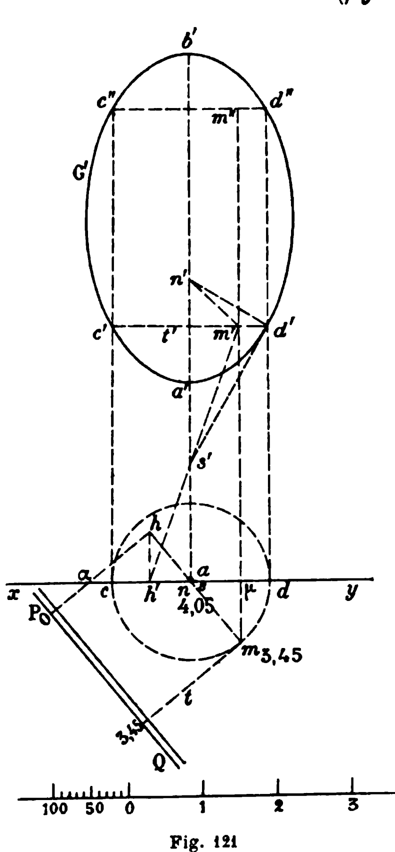


Fig. 121

contre le méridien principal de la surface en deux points qui se projettent horizontalement aux points c et d communs à la projection horizontale du parallèle et à la projection xy du méridien principal. En menant la ligne de rappel du point c on obtient les projections verticales de deux points du méridien principal, (c, c'), (c, c''), se projetant horizontalement au point c. On trouve de même deux points (d, d'), (d, d'') du méridien principal se projetant horizontalement au point d. Il y a donc deux parallèles de la surface se projetant horizontalement suivant la circonférence am ; leurs projections verticales sont les deux parallèles à la ligne de terre $c'd'$ et $c''d''$, les intersections m' et m'' de ces deux droites avec la ligne de rappel du point m sont les projections verticales des deux points de la surface qui se projettent horizontalement au point m. La cote du premier est égale à $\mu m'$, soit 3,45, et celle du second à $\mu m''$.

2° Proposons-nous de construire le plan tangent au point (m, m'). Il contient d'abord la tangente au point (m, m') au parallèle passant par ce point : c'est l'horizontale $(mt, m't')$. Pour achever de le déterminer, nous allons construire la tangente au point (m, m') au méridien passant par ce point. Nous nous appuierons sur ce que les tangentes aux différents méridiens en tous les points d'un même parallèle coupent l'axe au même point (100). Nous supposons qu'on sache construire la tangente en un point au méridien principal ; nous tracerons la tangente au point d', c'est la droite $(sd, s'd')$ qui coupe l'axe au point (s, s'). La tangente au point (m, m') au méridien passant par ce point sera la droite $(sm, s'm')$. Le plan tangent est donc déterminé par l'horizontale $(mt, m't')$ et la droite $(sm, s'm')$. Sa trace horizontale αP s'obtiendra en menant par la trace horizontale h de la droite $(sm, s'm')$ une parallèle à la droite mt. On connaît l'horizontale de cote zéro αP du plan et l'horizontale mt de cote 3,45 ; on en déduit son échelle de pente PQ.

Pour construire la normale à la surface au point (m, m') on s'appuie sur ce que les normales aux différents méridiens en tous les points d'un parallèle coupent l'axe au même point. On construira donc la normale au méridien principal au point d', c'est-à-dire la perpendiculaire à la tangente $s'd'$, soit $d'n'$ cette normale. La normale au point (m, m') sera la droite $(mn, m'n')$. On détermine la cote 4,05 du point (n, n') et la normale est alors représentée par sa projection cotée mn.

102. Problème. — *Une surface de révolution étant déterminée par son axe supposé vertical et par sa génératrice : 1° connaissant la projection d'un de ses points, trouver sa cote ; 2° construire le plan tangent et la normale en ce point.*

Soit *o* l'axe vertical de la surface. Supposons la génératrice de la surface donnée par sa projection horizontale G et par sa projection verticale G' sur un plan vertical *xy* (*fig.* **122**). Soit *m* la projection horizontale d'un point de la surface. Nous ferons une élévation de la figure en prenant comme plan vertical de projection le plan vertical *xy*.

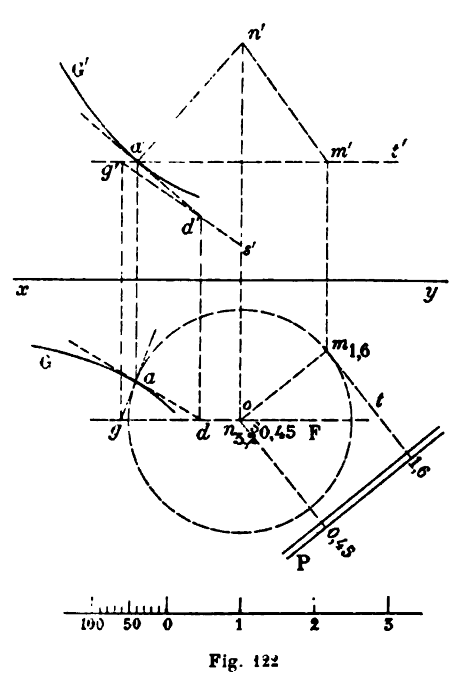


Fig. 122

1° Le parallèle de la surface qui passe par le point cherché se projette horizontalement suivant la circonférence ayant pour centre le point *o* et pour rayon *om* ; cette circonférence coupe la projection horizontale de la génératrice au point *a*, qui se projette verticalement au point *a'* sur la courbe G'. La projection verticale du parallèle passant par le point cherché est donc la parallèle à la ligne de terre menée par le point *a'* ; cette parallèle coupe la ligne de rappel du point *m* au point *m'*, qui est la projection verticale du point qu'on se propose de déterminer. Il n'y a plus qu'à mesurer sa cote, qui est égale à 1,6. Chaque point *a* d'intersection de la circonférence *om* avec la courbe G donne autant de points de la surface se projetant horizontalement au point *m* qu'il y a de points d'intersection de la ligne de rappel du point *a* avec la courbe G'.

2° Le plan tangent au point (*m*, *m'*) sera déterminé par la tangente (*mt*, *m't'*) au parallèle passant par ce point et par le point où l'axe de la surface est coupé par le plan tangent au point (*a*, *a'*) situé sur le

même parallèle que le point (m, m') (100). Le plan tangent au point (a, a') est déterminé par la tangente $(ag, a'g')$ au parallèle et par la tangente $(ab, a'b')$ à la génératrice (la construction suppose qu'on sache déterminer ces deux tangentes). Pour trouver le point d'intersection de l'axe avec le plan de ces deux droites nous employons comme plan auxiliaire le plan de front F passant par l'axe ; il coupe le plan tangent au point (a, a') suivant la frontale $(dg, d'g')$ qui rencontre l'axe au point (s, s'). Le plan tangent au point (m, m') est déterminé par l'horizontale $(mt, m't')$ et par le point (s, s'). On construit sans difficulté son échelle de pente P.

Pour obtenir la normale au point (m, m') nous construirons d'abord la normale au point (a, a'). Comme elle est perpendiculaire au plan tangent, sa projection verticale $a'n'$ est perpendiculaire à la projection verticale $d'g'$ de la frontale de ce plan ; cette normale coupe l'axe au point (n, n') et la normale au point (m, m') sera la droite $(mn, m'n')$ (100). La cote du point (n, n') est égale à 3,2.

III. — Section plane.

103. Pour déterminer un point d'une section plane d'une surface de révolution on coupe la surface et le plan sécant par un plan perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire horizontal puisque nous supposons l'axe vertical. Le plan auxiliaire coupe la surface suivant un parallèle et le plan sécant suivant une droite. Les points communs au parallèle et à la droite sont des points de la section.

Section plane d'un tore. — Nous prendrons comme exemple la surface engendrée par une circonférence tournant autour d'une droite située dans son plan ; on lui donne le nom de *tore*. Soient o l'axe de la surface et P le plan sécant donné par son échelle de pente (*fig.* 123). Nous construirons une élévation de la surface sur un plan vertical xy perpendiculaire au plan P (xy est parallèle à l'échelle de pente du plan P) et passant par l'axe. La circonférence génératrice de la surface est une circonférence située dans le plan vertical, soit la circonférence $a'd'$. Le plan vertical coupe encore la surface suivant une circonférence symétrique de la première par rapport à l'axe et qui constitue avec elle la méridienne principale de la surface. Le contour apparent vertical de

la surface se compose de ces deux circonférences et des deux tangentes *i'j'*, *l'n'*, car en chacun des points de ces lignes le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan vertical. Quant au contour apparent horizonal, il se compose des deux circonférences *dg*, *ch*.

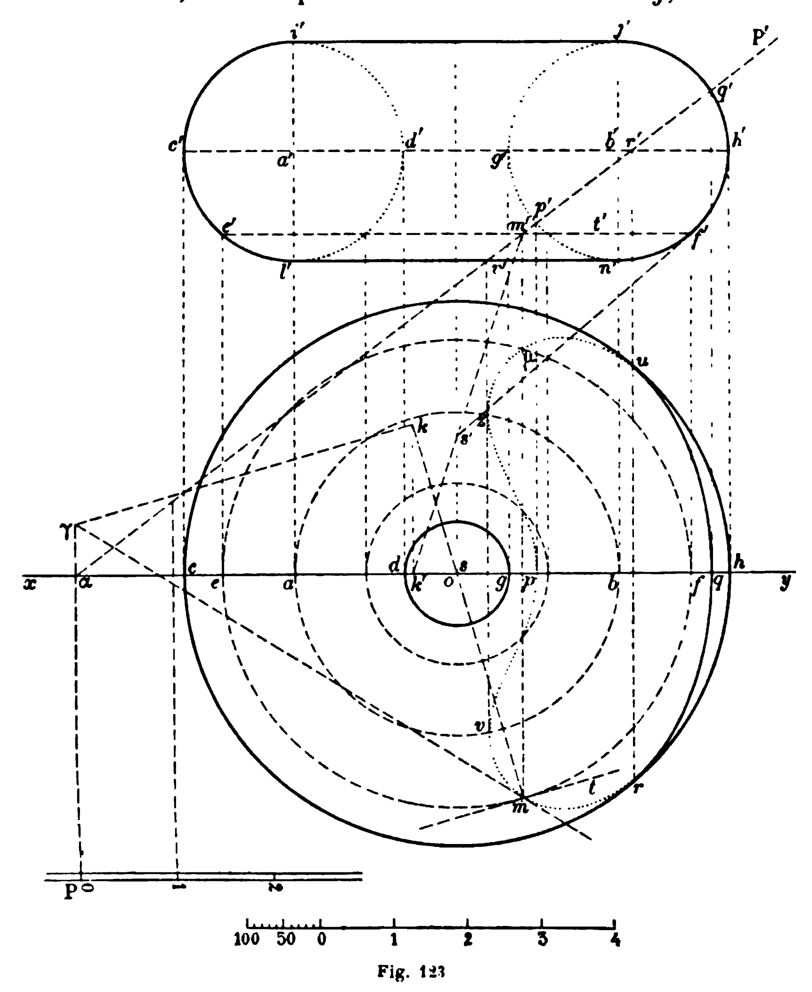


Fig. 123

La trace verticale du plan P, qui est alors un plan de bout, est la droite αP' (54), et sa trace horizontale est l'horizontale αP de cote zéro

Points sur les contours apparents. — Pour obtenir les points situés sur le contour apparent horizontal, nous prenons comme plan auxi-

liaire le plan horizontal $c'h'$ qui est le plan de ce contour apparent. Il coupe le plan sécant suivant la droite de bout r' qui rencontre la circonférence ch aux deux points r et u. Ces deux points étant sur le contour apparent horizontal, en ces points la projection horizontale de la section est tangente à la circonférence ch.

La trace verticale du plan sécant coupe la circonférence $b'h'$ aux deux points p', q', qui sont les projections verticales de deux points appartenant à la fois au plan sécant et à la surface. Ils se projettent horizontalement aux points p et q puisqu'ils sont dans le plan vertical. Ces points étant sur le contour apparent vertical, les plans tangents à la surface qui leur correspondent sont des plans de bout et leurs intersections avec le plan de bout $P\alpha P'$ sont des lignes de bout; or ce sont les tangentes à la section aux points (p, p'), (q, q'). Les tangentes aux points p et q à la projection horizontale de la section sont donc perpendiculaires à la ligne de terre. Il en est de même pour les points v et z, qui se projettent verticalement au point v' sur la portion $l'n'$ du contour apparent vertical et qui ont été obtenus par le plan auxiliaire $l'n'$.

Point quelconque et tangente en ce point. — Un plan horizontal quelconque $e'f'$ coupe la surface suivant le parallèle ef et le plan sécant suivant la ligne de bout m'; nous en déduisons les deux points m et μ. La tangente au point (m, m') est l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la surface déterminé par les deux droites $(mt, m't')$, $(ms, m's')$. Son horizontale de cote zéro est la droite $k\gamma$, parallèle à la droite mt menée par la trace horizontale k de la droite $(ms, m's')$; γ est un point de l'intersection des deux plans, et la tangente au point m est la droite γm.

Ayant obtenu d'une manière analogue un certain nombre de points de la courbe, on les joint par un trait continu et l'on obtient la courbe $qrmvpz\mu u$.

Le plan sécant et la surface sont symétriques par rapport au plan vertical, par suite la section est symétrique par rapport à ce plan et sa projection est symétrique par rapport à la droite xy.

Ponctuation. — Les points r et u qui sont sur le contour apparent horizontal séparent sur la courbe la région vue de la région cachée (86). La projection verticale nous montre que la région rqu est sur la

partie de la surface située au-dessus du contour apparent horizontal *c'h'*; c'est donc la région *rqu* qui est vue tandis que la région *rpu* est cachée.

104. Intersection d'une droite et d'une surface de révolution. — On déterminera la section de la surface par un plan passant par la droite, par exemple le plan projetant verticalement la droite, puis on prendra les points d'intersection de la droite et de la section plane de la surface ; comme la section et la droite sont dans un même plan de bout, ils seront donnés par leurs projections horizontales.

EXERCICES

1. — Une droite donnée tourne autour d'une verticale donnée (les deux droites ne sont pas dans le même plan).

1° Connaissant la projection horizontale d'un point de la surface engendrée par la droite, trouver la cote de ce point.

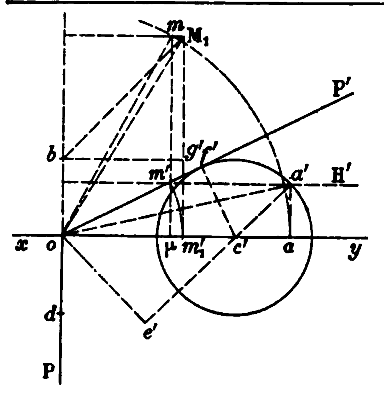
2° Construire le plan tangent en ce point.

3° Construire la projection d'un méridien sur un plan vertical parallèle au plan de ce méridien.

4° Construire une section plane quelconque de la surface.

La surface porte le nom de surface gauche de révolution.

2. — Construire la projection cotée de la section d'un tore par un plan bitangent, c'est-à-dire par un plan perpendiculaire à un plan méridien et dont la trace sur ce plan est la tangente commune intérieure aux deux circonférences sections du tore par le plan méridien. L'axe du tore est vertical (*).



(*) La section du tore par un plan bitangent se compose de deux cercles.

On peut le démontrer de la manière suivante :

Soient *xy* la ligne de terre, *o* l'axe du tore, *c'* le cercle générateur de rayon R et PoP' le plan bitangent. Le plan horizontal auxiliaire H' nous donne le point *m* de la projection horizontale de la section qui se projette verticalement en *m'*. Rabattons le plan PoP' sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale *o*P. Le point (*m*, *m'*) se rabat en M_1. Prenons *ob* égal à R. Nous allons démontrer que bM_1 est égal à *oc'*.

Traçons la droite *a'c'* et menons *oe'* perpendiculaire à *a'e'*. Les triangles semblables *oμm'*, *of'c'* donnent

3. — On donne dans un plan vertical un triangle équilatéral. Sur chacun de ses côtés et extérieurement au triangle on décrit trois demi-circonférences. On imagine la surface de révolution engendrée par le contour de ces demi-circonférences tournant autour d'un axe vertical situé dans le plan du triangle. Déterminer un point de la surface et le plan tangent en ce point.

4. — On donne deux droites quelconques et l'on considère la surface de révolution engendrée par l'une d'elles tournant autour de l'autre. Déterminer un point de cette surface et le plan tangent en ce point.

$$\frac{om'}{oc'} = \frac{m'\mu}{c'f'} = \frac{aa'}{c'a'} = \frac{oe'}{oc'},$$

à cause des triangles semblables $ac'a'$, $oc'e'$.

Donc

(1) $$oe' = om' = om'_1 = b'g'.$$

On voit d'ailleurs aisément qu'on a les égalités suivantes :

$$\overline{oa'}^2 = \overline{oa}^2 + \overline{aa'}^2 = \overline{om}^2 + \overline{\mu m'}^2 = \overline{o\mu}^2 + \overline{\mu m}^2 + \overline{\mu m'}^2 = \overline{om'}^2 + \overline{\mu m}^2 = \overline{om'_1}^2 + \overline{m'_1 M_1}^2$$

ou $$\overline{oa'}^2 = \overline{oM_1}^2$$

et (2) $$oa' = oM_1.$$

Les égalités (1) et (2) montrent que les triangles rectangles $oe'a'$, om'_1M_1 sont égaux. Donc $m'_1M_1 = e'a'$ et $g'M_1 = e'c'$ puisque $g'm'_1 = ob = R$. Les deux triangles rectangles $oe'c'$, $bg'M_1$ sont égaux et $bM_1 = oc'$. Le point M_1 est sur la circonférence décrite du point b comme centre avec oc' comme rayon.

On verrait d'une manière analogue que le point situé sur le second parallèle du plan H', du même côté que le point m par rapport à la ligne de terre, a son rabattement sur la circonférence décrite du point d comme centre avec oc' comme rayon, od étant égal à R.

CHAPITRE V

SPHÈRE. SPHÈRE CIRCONSCRITE A UN TÉTRAÈDRE. SPHÈRE INSCRITE DANS UN TÉTRAÈDRE.

I. — Sphère.

105. Représentation de la sphère. — La sphère est la surface de révolution engendrée par une circonférence tournant autour d'un de ses diamètres.

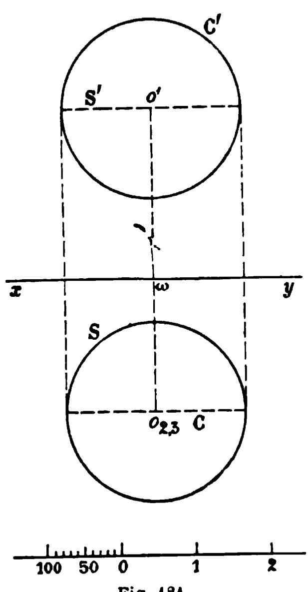


Fig. 124

Si par le centre d'une sphère on mène un plan parallèle au plan de comparaison, il coupe cette sphère suivant un grand cercle qui se projette suivant un grand cercle égal S (*fig.* **124**). En chaque point de ce grand cercle, le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au plan horizontal, le cercle S est donc le contour apparent horizontal de la sphère. La sphère sera représentée par le cercle S et par la projection cotée de son centre *o* ; la cote de ce centre est, sur l'épure considérée, 2,3.

Si l'on fait une élévation de la sphère sur un plan vertical xy, la projection verticale de la sphère sera une circonférence C' égale à la circonférence S dont la projection verticale du centre a été construite en prenant sa cote

$\omega o'$ égale à 2,3 ; c'est le contour apparent vertical en projection de la sphère. Le plan du contour apparent horizontal dans l'espace est le plan horizontal S' et le plan du contour apparent vertical dans l'espace est le plan de front C.

Lorsqu'on doit opérer sur une sphère, on prend souvent pour plan de comparaison le plan parallèle au plan horizontal de projection mené par le centre de la sphère il suffit pour cela de diminuer toutes les cotes de la cote du centre. Dans ce cas, si l'on fait ensuite une élévation de la sphère sur un plan vertical, les deux projections o, o' du centre sont confondues sur la ligne de terre et la projection verticale de la sphère coïncide avec sa projection horizontale.

106. Problème I. — *Connaissant la projection horizontale d'un point d'une sphère, trouver sa cote et construire le plan tangent à la sphère en ce point.*

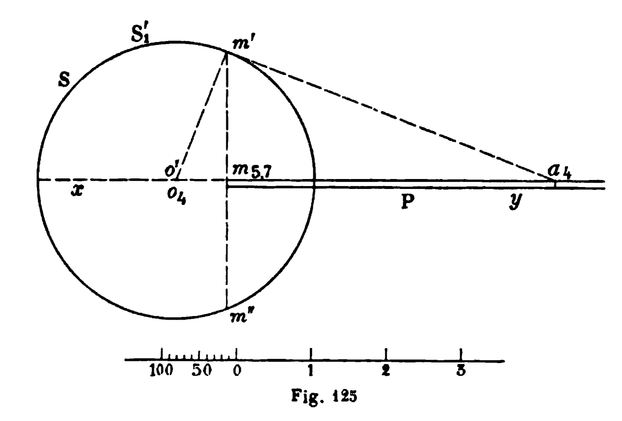


Fig. 125

Soit une sphère donnée par sa projection horizontale S et par la cote de son centre supposée égale à 4, et soit m la projection d'un point de la surface de la sphère (*fig.* 125). Supposons qu'on élève le plan de comparaison jusqu'au centre de la sphère, ce qui revient à diminuer toutes les cotes de 4, puis qu'on fasse une élévation de la sphère sur le plan vertical passant par le centre et par le point cherché. La trace horizontale de ce plan vertical, et par suite la ligne de terre xy, est la droite om. La projection verticale o' du centre se confond avec le point o et celle de la sphère est la circonférence S'_1 confondue avec la circonférence S. (Nous mettons S'_1 parce que ce ne sont pas les deux projections d'une même circonférence.)

Cette circonférence S'_1, intersection de la sphère et du plan vertical *om*, contient le point de la sphère qui se projette horizontalement au point *m*; donc, si nous menons la ligne de rappel du point *m*, elle coupe la circonférence S'_1 aux deux points *m'* et *m''* qui sont les projections verticales des points de la surface de la sphère se projetant horizontalement au point *m*.

Nous mesurons la longueur *mm'* qui est égale à 1,7 ; c'est la cote du point (*m*, *m'*) par rapport au plan de comparaison passant par le centre de la sphère. La cote du point (*m*, *m'*) par rapport au plan de comparaison primitif est donc $4 + 1,7$ ou 5,7 et celle du point (*m*, *m''*) $4 - 1,7$ ou 2,3.

Plan tangent. — Le plan tangent à la sphère au point (*m*, *m'*) est le plan perpendiculaire en ce point au rayon (*om*, *o'm'*). L'échelle de pente de ce plan est dirigée suivant la droite *xy* elle-même. Si nous menons la tangente à la circonférence S'_1 au point *m'*, comme elle est perpendiculaire à la droite *om'*, elle coupe l'échelle de pente du plan au point *a* ayant même cote que le point *o*, c'est-à-dire 4 (*). L'échelle de pente du plan tangent P est déterminée par les deux points *a*, de cote 4, et *m*, de cote 5,7.

107. Problème II. — *Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'une sphère.*

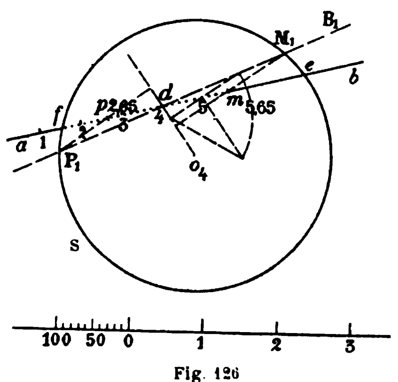


Fig. 126

Soient la sphère S dont le centre O a pour cote 4 et la droite AB donnée par son échelle de pente *ab* (*fig.* 126). Le plan déterminé par le centre de la sphère et par la droite AB coupe la surface de la sphère suivant un grand cercle dont les points d'intersection avec la droite sont les points cherchés. La droite OD

(*) En effet, nous avons $om \times am = \overline{1,7}^2$. Or, si on appelle *i* l'intervalle de la droite *om* et *i'* celui du plan P, on a

$$\frac{i}{om} = \frac{1}{1,7}, \qquad \frac{i'}{am} = \frac{1}{1,7}.$$

En tirant *om* et *am* de ces deux égalités et portant leurs valeurs dans la première, on a bien $ii' = 1$.

est l'horizontale de cote 4 de ce plan que nous rabattrons autour de cette horizontale. Le grand cercle suivant lequel il coupe la sphère se rabat suivant la circonférence S et la droite AB suivant la droite dB_1 obtenue en rabattant le point de la droite qui a pour cote 5. La droite dB_1 coupe la circonférence S aux points M_1 et P_1. Ces deux points se relèvent sur la droite *ab* aux points *m* et *p*, de cotes 5,65 et 2,65, qui sont les points demandés.

Ponctuation de la droite AB. — Nous supposons la surface de la sphère opaque. La portion *mp* de la droite située à l'intérieur de la sphère est cachée. Le point *m* ayant une cote supérieure à 4, la portion *me* de la droite est au-dessus du contour apparent horizontal; elle est par conséquent vue. Au contraire la portion *pf* est au-dessous du contour apparent horizontal et par suite est cachée jusqu'au point *f* à partir duquel la droite redevient vue.

Remarque. — Si le point de la droite qui a même cote que le centre de la sphère n'était pas dans les limites de l'épure, on déterminerait d'abord une horizontale quelconque du plan formé par la droite et le centre, on lui mènerait ensuite une parallèle par le centre de la sphère, ce serait l'horizontale du plan ayant même cote que le centre; on achèverait ensuite comme précédemment par un rabattement autour de cette horizontale.

Cas où la droite passe par le centre de la sphère. — Soient la sphère S et la droite AB qui passe par son centre, dont la cote est 4 (*fig.* 127). Nous rabattrons autour de son horizontale de cote 4 le plan projetant la droite AB. La droite se rabat suivant la droite oD_1 ($dD_1 = 1$), et la circonférence suivant laquelle la surface de la sphère est coupée par le plan projetant la droite se rabat suivant le cercle S. Les points M_1 et P_1 se relèvent aux points *m* et *p*, qui sont les points cherchés.

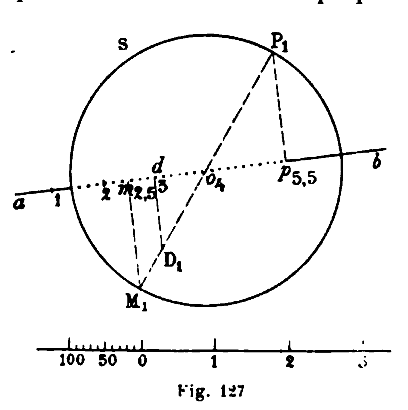


Fig. 127

La cote du point *p* est $4 + pP_1$ ou 5,5 et celle du point *m* $4 - mM_1$ ou 2,5. La ponctuation s'établit comme précédemment.

108. Section plane d'une sphère. — Problème III. — *On donne une sphère* S *et un plan* P *par son échelle de pente* (*fig.* 128). *Construire la courbe d'intersection de la surface de la sphère et du plan.*

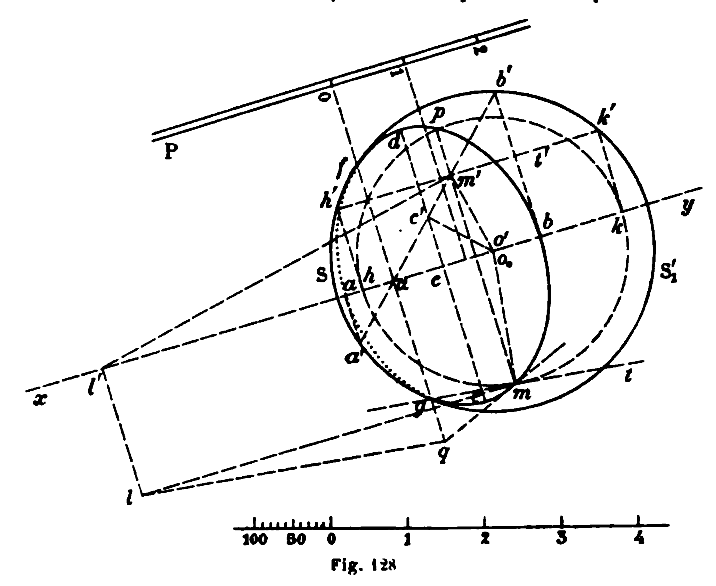


Fig. 128

Nous supposerons qu'on ait pris pour plan de comparaison le plan parallèle au plan horizontal passant par le centre de la sphère, dont la cote est alors nulle. Faisons une élévation de la figure en prenant comme plan vertical de projection le plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan P ; la ligne de terre sera la parallèle *xy* menée par le point *o* à l'échelle de pente du plan. La projection verticale *o'* du point O coïncide avec le point *o* et la projection verticale S'₁ de la sphère est confondue avec la circonférence S. Soit *ab'* la trace verticale du plan P (54). Dans le système actuel de projection, le plan P est un plan de bout qui coupe la sphère suivant un cercle ayant pour centre le pied (*c*, *c'*) de la perpendiculaire menée par le centre (*o*, *o'*) de la sphère à ce plan. Ce cercle est d'ailleurs symétrique par rapport au plan vertical qui est perpendiculaire au plan sécant, il a par suite pour diamètre la droite *a'b'* portion de la trace verticale du plan comprise entre les points où cette trace coupe la sphère. La circonférence du cercle de section se projette suivant une ellipse dont le grand axe est la projection du diamètre horizontal de ce cercle (68) ; or ce diamètre horizontal est la ligne de bout *c'*. On

aura donc les sommets *d* et *e* du grand axe en prenant sur la droite *de* de part et d'autre du point *c* des longueurs égales au rayon *c'a'* du cercle; quant au petit axe *ab*, c'est la projection horizontale du diamètre *a'b'* situé suivant une ligne de plus grande pente du plan. On connaît par suite les éléments de l'ellipse projection de la section de la surface de la sphère par le plan P, et l'on sait construire autant de points de cette ellipse que l'on voudra (68).

On peut obtenir un point quelconque de la section en employant la méthode indiquée pour une section plane d'une surface de révolution (103). Coupons la sphère et le plan par un plan horizontal arbitraire dont la trace verticale dans le système *xy* est la droite *h'k'*; il nous donne deux points *m* et *p* qui ont pour projection verticale le point *m'* et qui sont symétriques par rapport au plan vertical. Proposons-nous de construire la tangente au point *m* à la projection de la section. La tangente à la circonférence dans l'espace est l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la sphère au point (*m*, *m'*). Ce plan tangent est le plan perpendiculaire à la droite (*om*, *o'm'*) au point (*m*, *m'*). Il est déterminé par l'horizontale (*mt*, *m't'*) et la frontale (*ml*, *m'l'*) (29). La trace horizontale de ce plan est la parallèle *lq* à la projection horizontale de son horizontale (*mt*, *m't'*), menée par la trace horizontale *l* de la frontale. Le point *q* intersection de cette trace horizontale et de celle du plan P est un point de l'intersection des deux plans, et par suite la tangente à la projection de la section, au point *m*, est la droite *mq*.

Fig. 129

Les points *f* et *g* où la trace horizontale du plan P coupe le contour apparent horizontal de la sphère sont deux points de la projection de la section; comme ils sont sur le contour apparent de la sphère, la courbe est tangente au cercle S en ces deux points; en outre, ils séparent sur la courbe la région vue de la région cachée. Le point *b* a une cote positive, tandis que le point *a* a une cote négative; c'est donc la région *fbg* qui est vue tandis que la région *fag* est cachée.

Remarque. — Si le plan P passe par le centre de la sphère (*fig.* 129), la section est un grand cercle dont la projection se construit comme dans le cas général.

109. Plans tangents menés à une sphère par un point extérieur. Cône circonscrit. — Soient donnés une sphère S dont nous supposerons le centre O dans le plan de comparaison et un point A dont la projection est le point a et dont la cote est égale à 3,35 (*fig.* 130). Nous pouvons considérer la sphère comme une surface de révolution ayant pour axe le diamètre OA. Tout plan passant par la droite OA coupe la sphère suivant un grand cercle; si par le point A on mène une tangente à ce grand cercle et qu'on fasse tourner le plan autour de la droite OA, cette tangente engendre un cône de révolution ayant pour sommet le point A et qui est circonscrit à la sphère tout le long de la circonférence engendrée par le point de contact de la tangente. Les plans tangents à la sphère menés par le point A sont les plans tangents à ce cône que nous nous proposons de déterminer.

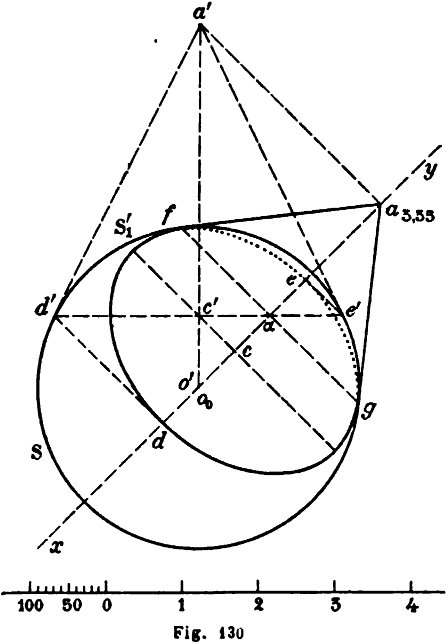


Fig. 130

Prenons comme plan vertical de projection le plan vertical passant par la droite OA ; la ligne de terre est la droite oa, la projection verticale S_1' de la sphère est confondue avec la circonférence S et la projection verticale du point A est le point a'. La section de la sphère par le plan vertical, qui passe par la droite OA, est la circonférence S_1'; menons par le point a' les tangentes $a'd'$, $a'e'$ à cette circonférence. Si l'on suppose qu'on fasse tourner le plan de cette circonférence autour de OA, les points d' et e' engendreront la circonférence directrice du cône circonscrit à la sphère ayant pour sommet le point A. Le plan de cette circonférence est le plan de bout qui a pour trace

verticale la droite $d'e'$; la directrice du cône est donc la section de la sphère par ce plan et son sommet est le point (a, a'). Un plan tangent quelconque à ce cône sera un plan tangent à la sphère passant par le point A.

Nous avons construit l'ellipse $efdg$ projection de la directrice de ce cône (108). Les points f et g où la directrice du cône est tangente au contour apparent horizontal de la sphère sont les points où ce contour apparent est tangent au contour apparent horizontal du cône (86), qui par suite se compose des deux génératrices af, ag.

110. Plans tangents à une sphère parallèles à une droite donnée. — Soient une sphère S dont nous supposons le centre dans le plan de comparaison, et une droite AB donnée par son échelle de pente ab (*fig.* 131). Les plans tangents à la sphère parallèles à la droite AB sont les plans tangents au cylindre circonscrit à la sphère dont les génératrices sont parallèles à la droite AB. La directrice de ce cylindre est le grand cercle dont le plan est le plan P mené par le centre de la sphère perpendiculairement à la droite AB (59). La direction des génératrices de ce cylindre est la droite AB; il est donc parfaitement déterminé. Un plan tangent quelconque à ce cylindre est un plan tangent à la sphère parallèle à la droite AB. L'ellipse $egfh$ est la projection de la directrice du cylindre.

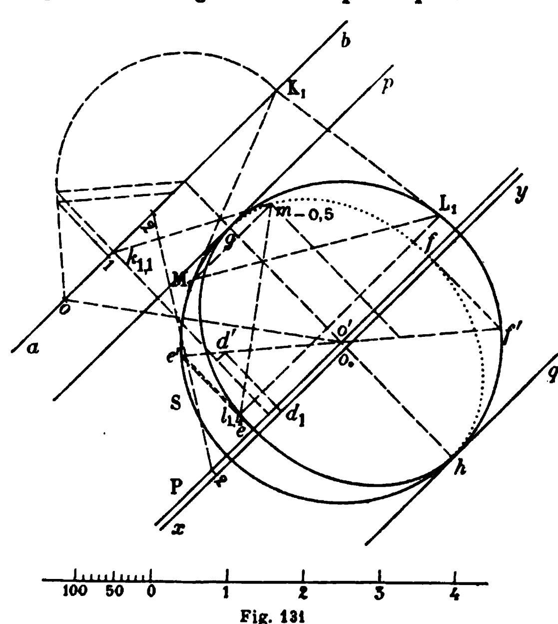


Fig. 131

111. Problème IV. — *Mener par une droite donnée un plan tangent à une sphère donnée.* — Soient la sphère S et la droite AB (*fig.* 131).

Imaginons un cône circonscrit à la sphère et ayant pour sommet un point de la droite; tout plan tangent à ce cône et passant par la droite sera tangent à la sphère et par suite répondra à la question. On sera donc ramené à construire le plan tangent à un cône passant par une droite qui contient le sommet (90). Choisissons comme sommet du cône le point rejeté à l'infini dans la direction de la droite, c'est-à-dire considérons le cylindre circonscrit à la sphère dont les génératrices sont parallèles à la droite. Sa directrice est le grand cercle dont le plan est le plan P perpendiculaire à la droite menée par le point O. Pour lui mener un plan tangent par la droite AB, nous déterminons d'abord le point d'intersection de cette droite et du plan P : soit K ce point obtenu à l'aide des droites joignant les points de cote zéro et les points de cote 2 (56). Puis par le point K nous mènerons des tangentes à la directrice. C'est une opération à effectuer dans le plan P; nous rabattons donc le plan P autour de son horizontale de cote zéro. Le point K se rabat au point K_1 et la directrice suivant la circonférence S. Nous menons les tangentes K_1L_1, K_1M_1, puis nous relevons les points L_1 et M_1; nous obtenons ainsi les points L et M qui, appartenant au plan P, ont pour cotes respectivement 1,4 et —0,5 (51). On peut mener par la droite deux plans tangents à la sphère : l'un est déterminé par la droite AB et le point L de cote 1,7, et l'autre par la droite AB et le point M de cote —0,5.

112. Problème V. — *Mener à une sphère des plans tangents perpendiculaires à une droite donnée.*

Par le centre de la sphère on mène une parallèle à la droite donnée et par les points où elle coupe la sphère on mène des plans perpendiculaires à cette droite.

On ramène immédiatement à ce problème le problème suivant : *mener à la sphère des plans tangents parallèles à un plan donné.*

II. — Sphère circonscrite à un tétraèdre.

113. Problème. — *Construire la projection cotée de la sphère circonscrite à un tétraèdre.*

Soit un tétraèdre SABC. Le centre de la sphère circonscrite au

tétraèdre est le point également distant des quatre points S, A, B, C. Le lieu géométrique des points également distants des trois points A, B, C est la perpendiculaire menée au plan ABC par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Le lieu géométrique des points également distants des deux points A et S est le plan perpendiculaire à la droite AS en son milieu. Le point d'intersection de ce plan et de la perpendiculaire au plan ABC sera le centre de la sphère circonscrite. Son rayon sera la distance de son centre à l'un des sommets du tétraèdre, A par exemple.

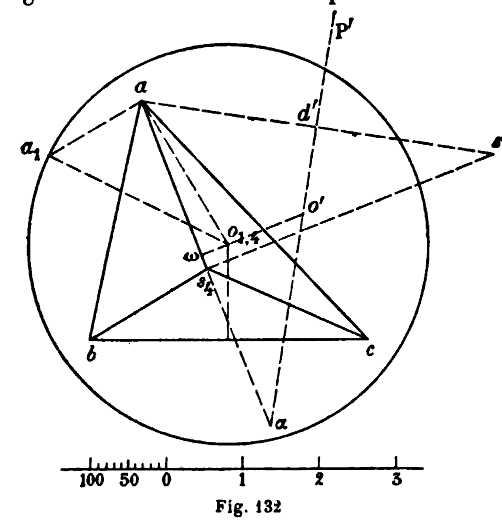


Fig. 132

Nous avons exécuté l'épure dans le cas où la face ABC du tétraèdre est dans le plan de comparaison (*fig.* 132). Soit S le sommet ayant pour cote 4. Le point *o* est le centre du cercle circonscrit au triangle *abc*. *as'* est le rabattement de l'arête AS et αP' est le rabattement de l'échelle de pente du plan perpendiculaire à l'arête AS mené par le milieu de cette arête. *o* est la projection du centre de la sphère circonscrite. Sa cote est celle du point du plan αP' qui se projette au point *o*, elle est égale à ω*o'* qui, à l'échelle du dessin, a pour mesure 1,4. Enfin le rayon de la sphère est égal à la distance oa_1 des deux points O et A.

Nous avons représenté le tétraèdre et la sphère en supposant la sphère transparente.

III. — Sphère inscrite dans un tétraèdre.

114. Problème. — *Construire la projection cotée de la sphère inscrite dans un tétraèdre.*

Le centre de la sphère inscrite dans un tétraèdre SABC est le point commun aux trois plans bissecteurs intérieurs des dièdres ayant pour

arêtes les arêtes d'une même face, par exemple les droites AB, BC, CA.

Supposons la base ABC du tétraèdre SABC dans le plan de comparaison (*fig.* 133). Soit 3 la cote du sommet S. Nous allons construire le plan bissecteur du dièdre BC en introduisant une élévation sur un plan vertical x_1y_1 perpendiculaire à la droite BC. Dans ce système la projection verticale du point S est le point s'_1. La trace verticale du plan SBC, qui est alors un plan de bout, est la droite $\alpha_1 s'_1$, et la trace verticale du plan bissecteur intérieur du dièdre BC est la droite $\alpha_1 P'$.

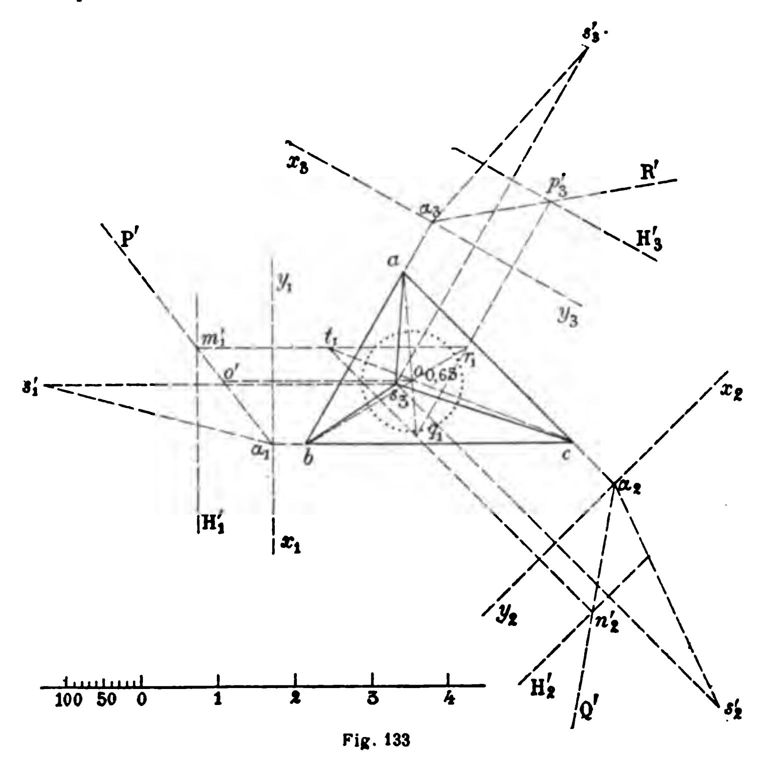


Fig. 133

Nous construisons de même la trace verticale $\alpha_2 Q'$ du plan bissecteur du dièdre BC sur un plan vertical x_2y_2 perpendiculaire à la droite *ac*, et la trace verticale $\alpha_3 R'$ du plan bissecteur du dièdre AB sur un plan vertical x_3y_3 perpendiculaire à la droite *ab*.

Pour déterminer le point commun à ces trois plans bissecteurs, nous

allons d'abord construire la droite d'intersection de ceux qui passent par AB et AC, c'est-à-dire des deux plans α_3R', α_2Q'. D'abord cette intersection passe par le point a. Pour en obtenir un autre point, remarquons que les deux plans, représentés dans deux systèmes différents, ont cependant leur projection horizontale commune. Couponsles par un plan horizontal auxiliaire, par exemple le plan horizontal de cote 1. Il est représenté dans le système x_2y_2 par sa trace verticale H'_2 dont la distance à la ligne de terre est égale à 1, et dans le système x_3y_3 par sa trace verticale H'_3. Le plan H'_2 coupe le plan α_2Q' suivant la ligne de bout n'_2, et le même plan H'_3 coupe le plan α_3R' suivant la ligne de bout p'_3. Ces deux lignes de bout se coupent au point Q, projeté en q, et qui a pour cote 1. La droite AQ est la droite d'intersection des plans bissecteurs des dièdres AB et AC.

Nous construisons de même la droite d'intersection BR des plans bissecteurs des dièdres AB et BC, et la droite d'intersection CT des plans bissecteurs des dièdres BC et AC. Les trois droites AQ, BR, CT se coupent au point O, qui est le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre. Le rayon de la sphère est égal à la cote du point O ; on peut la déterminer dans l'un des plans bissecteurs, par exemple le plan α_1P', elle est égale à 0,65.

Nous avons représenté le tétraèdre et la sphère en supposant le tétraèdre opaque.

EXERCICES

1. — Un triangle ABC est situé dans le plan de cote zéro ; ses côtés ont pour valeurs

$$AB = 65^{mm}, \qquad BC = 62^{mm}, \qquad CA = 51^{mm}.$$

1° Construire sur ce triangle un tétraèdre SABC, sachant que ses arêtes opposées sont deux à deux rectangulaires, et dont la hauteur issue du sommet S est donnée et égale à 20^{mm}. Sphère circonscrite.

2° Construire le tétraèdre formé par les plans tangents menés à la sphère circonscrite au tétraèdre précédent aux points S, A, B, C.

On se servira comme plan auxiliaire de projection du plan vertical parallèle à la droite joignant le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

(*École navale, 1893.*)

2. — Un tétraèdre SABC dont l'angle trièdre S est trirectangle, a sa base ABC sur le plan horizontal; AB est sur la ligne de terre (A vers la gauche) et a pour longueur 140^{mm}. La projection horizontale du sommet S est un point *s* dont les distances aux points A et B sont $As = 105^{mm}$ et $Bs = 49^{mm}$. Construire ce tétraèdre, puis son intersection avec la sphère ayant S pour centre et passant par le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on représentera la partie du volume du tétraèdre extérieure à la sphère S.

(*École de Saint-Cyr, 1891.*)

3. — Une sphère S dont le rayon a 4^{cm} repose sur le plan horizontal et touche le plan vertical. On la coupe par le plan bissecteur P du dièdre formé par les plans de projection. On demande de construire le rayon et les projections du centre du cercle provenant de l'intersection de la sphère S et du plan P. — On construira également les projections d'un point de l'intersection.

(*Institut agronomique, 1888.*)

4. — Un triangle équilatéral de 8^{cm} de côté, tracé dans un plan horizontal de projection, sert de base à une pyramide dont les arêtes inclinées sur ce plan ont une même longueur égale à 11^{cm}.

On circonscrit une sphère à cette pyramide et l'on coupe cette sphère par un plan passant par son centre et par l'un des côtés du triangle de base de la pyramide.

Construire l'ellipse projection horizontale de la section de la sphère ainsi obtenue.

(*Institut agronomique, 1891.*)

5. — Une sphère S, dont le centre O est dans le plan horizontal de cote zéro, a pour rayon $R = 40^{mm}$. Construire les intersections de cette sphère avec les arêtes d'un trièdre trirectangle dont le sommet est en O et dont deux des faces font respectivement avec le plan horizontal des angles de 48° et de 69°.

Projection de l'octaèdre inscrit dont ces points sont les sommets.

Projection de la figure sur un plan vertical parallèle à l'une des arêtes du trièdre.

(*École navale, 1892.*)

6. — Mener par une droite du plan horizontal un plan tangent à une sphère donnée. (N)

7. — Étant donné un trièdre dont une des faces est dans le plan horizontal, inscrire dans ce trièdre une sphère de rayon donné. (N)

8. — Construire les projections cotées de toutes les sphères tangentes au plan de comparaison et à trois plans donnés.

9. — On donne une droite AB, et une droite H dans le plan de comparaison :

1° Déterminer la perpendiculaire commune à AB et à H.

2° Construire la sphère décrite sur cette perpendiculaire comme diamètre et déterminer son intersection par le plan horizontal.

3° Construire le cube circonscrit à cette sphère dont l'une des faces passe par la droite AB et dont l'une des arêtes est parallèle à cette droite.

10. — On donne une sphère et une droite D qui coupe le plan de comparaison au point A. Inscrire dans la sphère un cube dont une face passe par la droite D, un côté de cette face passant par le point A.

CHAPITRE VI

PLANS FAISANT AVEC UN PLAN DONNÉ UN ANGLE DONNÉ. PLANS TANGENTS COMMUNS A DEUX SPHÈRES. GÉNÉRATRICES COMMUNES A DEUX CONES DE RÉVOLUTION DE MÊME SOMMET.

I. — Plans faisant avec un plan donné un angle donné.

115. Problème. — *Construire le contour apparent d'un cône de révolution dont on connaît l'axe et l'angle au sommet.*

Fig. 134

Soit SA l'axe du cône donné par son échelle de pente *sa* (*fig.* 134), Désignons par 2θ l'angle au sommet du cône. Prenons comme plan vertical de projection le plan vertical *xy* projetant l'axe du cône ; la projection verticale de cet axe sera la droite $s'a'$. Le plan vertical coupera le cône suivant deux génératrices $s'b'$, $s'c'$, faisant chacune avec la droite $s'a'$ un angle égal à θ ; elles constitueront le contour apparent vertical du cône. Pour déterminer une directrice du cône, nous le couperons par un plan de bout perpendiculaire à l'axe ayant pour trace verticale la droite $b'c'$ perpendiculaire à la droite $s'a'$. La directrice sera

la circonférence située dans ce plan, ayant pour centre le point (a, a') et pour rayon la longueur $a'b'$; le cône est donc bien déterminé. Pour construire son contour apparent horizontal, nous devons lui mener des plans tangents parallèles à une verticale (94). La verticale menée par le sommet coupe le plan de la directrice au point (d, d') ; pour construire les tangentes menées à la directrice par ce point, nous rabattrons le plan de la directrice autour de sa trace verticale sur le plan vertical. La directrice se rabat suivant la circonférence dont le diamètre est $b'c'$, et le point (d, d'), qui est sur la charnière, se rabat au point d' lui-même. Par le point d' nous menons les tangentes $d'M_1$, $d'P_1$ au rabattement de la directrice ; les points M_1 et P_1 se relèvent en deux points qui se projettent verticalement au point m' et horizontalement aux deux points m et p, symétriques par rapport au plan vertical, et dont l'éloignement est égal à $m'M_1$. Leurs cotes sont égales à celle du point m', c'est-à-dire à 5,3. Les génératrices de contour apparent horizontal sont les deux droites SM et SP. Leurs projections sont symétriques par rapport à la projection horizontale de l'axe.

Remarque. — Quand on connaît l'axe SA d'un cône de révolution et les projections sf, sg des deux génératrices de contour apparent, on peut les graduer sans connaître l'angle au sommet du cône. Nous allons démontrer que si on mène de la projection horizontale a d'un point A de l'axe une perpendiculaire aq à la projection sf de l'une des génératrices de contour apparent, le point Q de cette génératrice qui se projette au point q a même cote que le point A.

Soit M le point de la surface du cône qui se projette au point m. Le plan tangent au cône au point M est le plan vertical SMm. Le plan méridien passant par le point M est le plan SAM ; il est donc perpendiculaire au plan SMm. Si par le point A nous menons une perpendiculaire au plan SMm, elle sera dans le plan SAM et par suite coupera l'intersection SM des deux plans en un point Q ; d'ailleurs la droite AQ étant perpendiculaire au plan SMm est horizontale et de plus est perpendiculaire à la droite SM située dans ce plan ; donc l'angle SQA se projette suivant un angle droit, et, puisque la droite AQ est horizontale, le point Q a même cote que le point A.

116. Les plans qui passent par un point A et qui font avec un plan

P un certain angle sont tangents à un cône de révolution ayant pour sommet le point A, pour axe la perpendiculaire au plan P menée par le point A, et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle donné. On pourra donc appliquer le problème précédent à la construction de plans faisant avec un plan donné un angle donné.

Exemple. — *Mener par une droite* AB *donnée par son échelle de pente ab un plan faisant avec un plan donné* P *un angle donné* θ (*fig.* 135).

Nous considérons le cône de révolution ayant pour sommet le point S de la droite, pour axe la perpendiculaire au plan P menée par le point S, et pour demi-angle au sommet le complément de l'angle θ. La perpendiculaire au plan P menée par le point S est la droite SC (58). Nous prenons comme plan vertical de projection le plan vertical xy projetant l'axe du cône et en même temps nous élevons le plan de comparaison jusqu'au plan horizontal de cote 2 passant par le point S. La projection verticale de l'axe du cône est la droite $s'c'$, et son contour apparent vertical se compose des deux droites $s'd'$, $s'e'$ qui font chacune avec la droite $s'c'$ un angle égal au complément de l'angle θ. Nous construisons la projection verticale $a'b'$ de la droite AB, et nous coupons le cône par le plan de bout perpendiculaire à l'axe ayant pour trace verticale la droite $d'e'$ arbitrairement choisie (113) ; ce sera le plan de la directrice du cône.

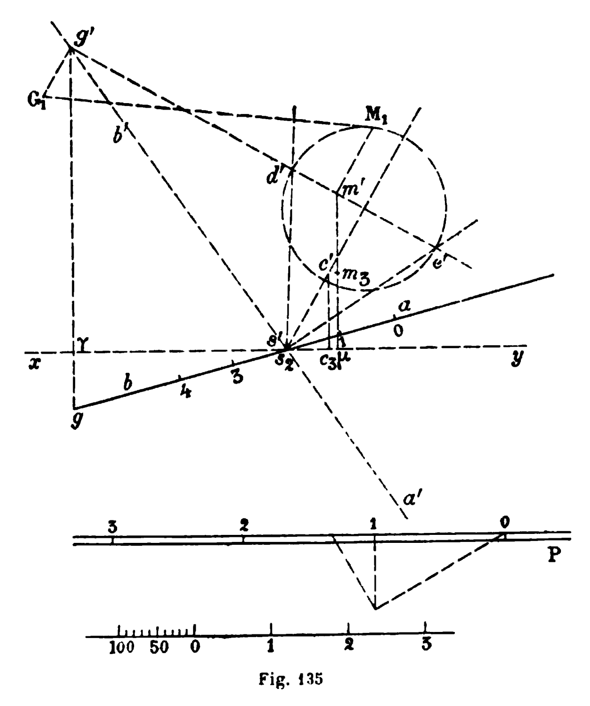


Fig. 135

Il n'y a plus qu'à mener un plan tangent au cône par la droite AB qui passe par le sommet.

La droite AB coupe le plan de la directrice du cône au point (g, g'). Pour mener par ce point une tangente à la directrice, nous rabattons le plan de cette directrice sur le plan vertical autour de sa trace verticale (113).

La directrice se rabat suivant la circonférence dont le diamètre est $d'e'$, et le point G au point G_1 $(g'G_1 = \gamma G)$. Par le point G_1 nous menons une tangente G_1M_1 à la directrice rabattue; le point de contact M_1 se relève au point (m, m') $(\mu m = m'M_1$ et, les points G_1 et M_1 étant de part et d'autre de la charnière, les points g et m doivent être de part et d'autre de sa projection horizontale $xy)$. Le plan demandé est déterminé par la droite AB et par le point M dont la projection est le point m, et dont la cote est égale à $\mu m + 2$ ou 3.

La seconde tangente menée par le point G_1 au rabattement de la directrice donnerait une seconde solution. Les deux solutions sont deux plans symétriques par rapport au plan passant par la droite et par l'axe du cône, c'est-à-dire au plan passant par la droite et perpendiculaire au plan P.

II. — Plans tangents communs à deux sphères.

117. Plans tangents communs à deux sphères. — Si un plan est tangent à deux sphères, les rayons aboutissant aux deux points de contact sont perpendiculaires à ce plan et par suite parallèles; ils sont donc avec la ligne des centres des deux sphères dans un même plan qui coupe les deux sphères suivant deux grands cercles; les deux rayons parallèles considérés sont deux rayons de ces deux grands cercles, la droite qui joint les points de contact passe donc par l'un des centres de similitude des deux grands cercles, c'est-à-dire par l'un des centres de similitude des deux sphères. Comme cette droite est contenue dans le plan considéré, on voit que :

Tout plan tangent commun à deux sphères passe par l'un de leurs centres de similitude.

Cela posé, si l'on conçoit que le plan des deux rayons parallèles

tourne autour de la ligne des centres, les deux grands cercles engendrent les deux sphères, et la droite qui joint les points de contact engendre un cône circonscrit aux deux sphères, qui a pour sommet le centre de similitude correspondant. Le plan tangent aux deux sphères considérées passe par la génératrice de ce cône sur laquelle sont les deux points de contact et contient la tangente à sa directrice; cette directrice est le cercle de contact du cône avec l'une des deux sphères, puisque le plan tangent contient toute tangente à cette sphère au point où il lui est tangent; il est donc tangent au cône. Donc :

Les plans tangents communs à deux sphères sont les plans tangents aux deux cônes circonscrits aux deux sphères ayant pour sommets les centres de similitude des deux sphères.

Ajoutons que le contour apparent en projection d'un cône circonscrit à une sphère étant tangent au contour apparent de la sphère, le contour apparent d'un cône circonscrit à deux sphères se projette suivant les tangentes communes aux contours apparents des deux sphères, de sorte que les projections des centres de similitude de deux sphères sont les centres de similitude de leurs contours apparents en projection.

118. Problème. — *Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.*

Le problème revient à mener par le point un plan tangent au cône circonscrit aux deux sphères ayant pour sommet l'un des centres de similitude des deux sphères.

On déterminera d'abord l'un des centres de similitude des deux sphères : sa projection est le centre de similitude des contours apparents horizontaux des deux sphères; quant à sa cote, on l'obtiendra aisément connaissant sa projection, puisqu'il est sur la ligne des centres. On déterminera le cône circonscrit à l'une des sphères ayant pour sommet le centre de similitude considéré (109). Enfin par le point donné on mènera un plan tangent à ce cône (90).

Il y a deux cônes circonscrits aux deux sphères ayant pour sommets les deux centres de similitude, et par le point donné on peut en général mener deux plans tangents à chacun des deux cônes. Le problème peut donc avoir au plus quatre solutions.

119. Problème. — *Mener un plan tangent commun à deux cônes de révolution de même sommet.*

Dans chacun des deux cônes on inscrit arbitrairement une sphère; il n'y a plus ensuite qu'à mener un plan tangent aux deux sphères par le sommet commun des deux cônes. Pour résoudre ce dernier problème, on choisit un centre de similitude des deux sphères, on le joint au sommet commun des deux cônes, et par la droite ainsi obtenue on doit mener un plan tangent au cône circonscrit aux deux sphères ayant pour sommet le centre de similitude considéré. Comme le plan demandé est tangent à la fois aux deux sphères et aux deux cônes donnés, on peut encore par la droite qui joint le sommet commun des deux cônes au centre de similitude des deux sphères mener un plan tangent soit à l'une des deux sphères, soit à l'un des deux cônes donnés.

Le problème aura au plus quatre solutions.

Remarque. — Toute sphère inscrite dans un cône a son contour apparent tangent au contour apparent du cône; on peut donc se donner arbitrairement le rayon de la sphère et inscrire dans le contour apparent du cône une circonférence ayant ce rayon donné, ce sera le contour apparent de la sphère. Cela posé, dans le problème précédent, ayant inscrit arbitrairement une première sphère dans l'un des cônes, on peut inscrire une sphère égale dans le second. Le centre de similitude externe des deux sphères sera rejeté à l'infini dans la direction de la ligne des centres, et le centre de similitude interne sera le milieu de la droite qui joint les deux centres. Le cône circonscrit aux deux sphères ayant pour sommet le centre de similitude externe deviendra un cylindre; on mènera par le sommet des deux cônes une parallèle à la ligne des centres des deux sphères inscrites et par cette droite on mènera un plan tangent à l'une des deux sphères ou à l'un des deux cônes; on obtiendra ainsi les plans tangents correspondant au centre de similitude externe des deux sphères.

120. Application. — On appliquera la solution du problème précédent au problème qui consiste à mener par un point un plan faisant avec deux plans donnés P et Q des angles donnés λ et θ. La question revient en effet à mener un plan tangent à deux cônes de révolution ayant pour sommet commun le point donné, pour axes les perpendiculaires menées par ce point aux plans P et Q et pour demi-angles au sommet, le premier, le complément de l'angle λ, le second, le com-

plément de l'angle θ. La solution reposant sur la considération du plan des axes des deux cônes, quand il est vertical nous ferons une élévation de la figure en le prenant comme plan vertical de projection.

Exemple. — *Mener par un point* A *donné par sa projection* a *et sa cote* 3 *un plan faisant un angle donné* λ *avec le plan horizontal et un angle donné* θ *avec un plan vertical donné* V (*fig.* 136).

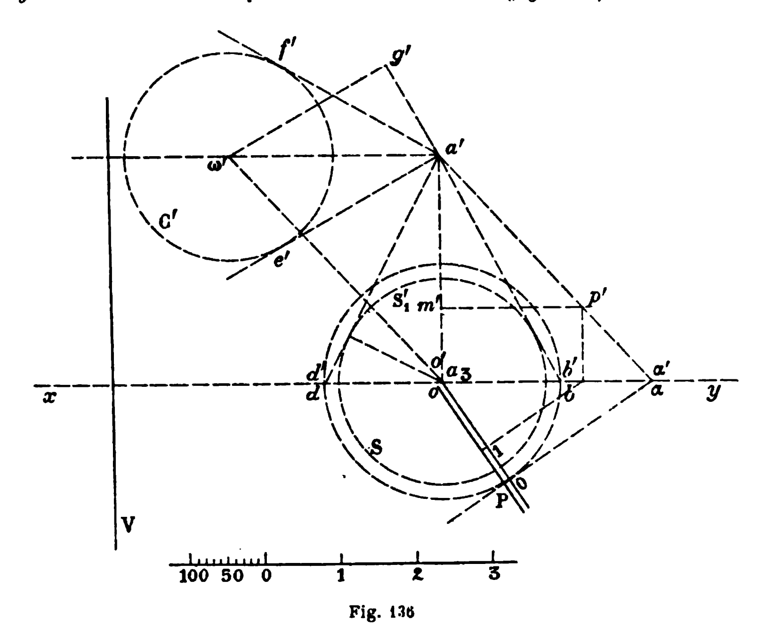


Fig. 136

L'axe de l'un des deux cônes est vertical, le plan des axes des deux cônes est par suite vertical ; nous le prendrons comme plan vertical de projection; comme l'axe de l'autre cône est perpendiculaire au plan V, la ligne de terre xy sera la perpendiculaire à la trace horizontale du plan V menée par le point a.

La projection verticale du point A est le point a'. L'axe de l'un des deux cônes est la verticale a et son demi-angle au sommet $aa'b'$ est égal au complément de l'angle λ. Le contour apparent vertical de ce cône se compose des deux génératrices ($ab, a'b'$), ($ad, a'd'$). L'axe du second cône, situé dans le plan vertical, est la droite $a'\omega'$ perpendiculaire au plan V et par suite parallèle à la ligne de terre; son contour apparent vertical se compose des deux droites $a'e'$, $a'f'$, qui font avec

la droite $a'\omega'$ et de part et d'autre de cette droite, chacune un angle égal au complément de l'angle θ. Prenons pour sphère inscrite dans le premier cône celle qui a pour centre le point (o, o') où l'axe coupe la ligne de terre; son contour apparent vertical est le cercle S'_1. Inscrivons dans le second cône une sphère égale à la précédente; dans ce but nous menons la perpendiculaire $a'g'$ à la droite $a'e'$, nous prenons la longueur $a'g'$ égale au rayon de la circonférence S'_1. et nous traçons $g'\omega'$ parallèle à la droite $a'e'$, le point ω' où elle coupe l'axe du cône est le centre de la seconde sphère dont le contour apparent vertical est le cercle C'. La ligne des centres des deux sphères est la droite $o'\omega'$ située dans le plan vertical. Nous lui menons une parallèle par le point (a, a') et par cette parallèle $(a\alpha, a'\alpha')$ nous allons faire passer un plan tangent au cône dont l'axe est la verticale a. La directrice du cône, dans le plan horizontal, est la circonférence de diamètre bd. La droite $(a\alpha, a'\alpha')$ coupe le plan horizontal au point (α, α') ; par le point α nous menons la tangente αP à la directrice, c'est la trace horizontale de l'un des plans demandés. Comme il passe par le point (a, a') qui est situé dans le plan vertical, sa trace verticale est la droite $\alpha'a'$. On en déduit aisément son échelle de pente aP en construisant son horizontale située dans le plan horizontal $m'p'$ dont la cote est égale à 1.

La seconde tangente menée par le point α au cercle bd donnerait une seconde solution.

Il y a deux autres solutions correspondant au centre de similitude interne qui est le milieu de la droite $o'\omega'$.

Remarque I. — Il n'est pas nécessaire de tracer les circonférences S_1 et C'. On n'a besoin que de leurs centres et de leur rayon pour déterminer la droite $o'\omega'$.

Remarque II. — Quand le plan des axes des deux cônes est oblique au plan de comparaison, on peut le rabattre sur un plan horizontal; il coupe les deux sphères inscrites suivant deux grands cercles qui se rabattent suivant deux circonférences tangentes aux rabattements des génératrices d'intersection des deux cônes et du plan des axes. Ces génératrices, dans le plan rabattu, font avec les rabattements des axes des angles égaux aux demi-angles aux sommets des deux cônes. On détermine les centres de similitude des deux circonférences et l'on relève les droites qui joignent le rabattement du sommet commun des deux cônes aux rabattements des centres de similitude. Il ne reste plus

qu'à mener par ces droites les plans tangents soit à l'une des sphères, soit à l'un des cônes.

121. Problème. — *Mener par un point un plan tangent à une sphère faisant avec un plan donné un angle donné.*

Les plans tangents à une sphère faisant avec un plan donné un angle donné sont tangents à un cône circonscrit à la sphère dont le demi-angle au sommet est égal au complément de l'angle donné, et dont l'axe est perpendiculaire au plan donné. Nous allons montrer comment on peut déterminer ce cône.

Soient C la sphère donnée, dont nous supposons le centre dans le plan de comparaison, P le plan donné, et θ l'angle donné (*fig.* 137). L'axe du cône que nous nous proposons de déterminer est la perpendiculaire au plan P menée par le centre de la sphère. Prenons comme plan vertical de projection le plan vertical passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan P. La ligne de terre xy sera la parallèle à l'échelle de pente du plan menée par le point o. La projection verticale C_1' de la sphère est confondue avec la circonférence C, et la trace verticale du plan P est la droite $\alpha P'$. L'axe du cône est la droite $(oa, o'a')$ située dans le plan vertical de projection, $o'a'$ étant perpendiculaire à la droite $\alpha P'$. Le contour apparent vertical du cône, situé d'ailleurs dans le plan vertical, se compose des deux tangentes au contour apparent vertical de la sphère $b's'$, $d's'$, faisant avec la trace verticale $\alpha P'$ du plan un angle égal à l'angle θ (*) Le sommet du cône est le point (s, s') où elles rencontrent l'axe $(oa, o'a')$, et sa directrice

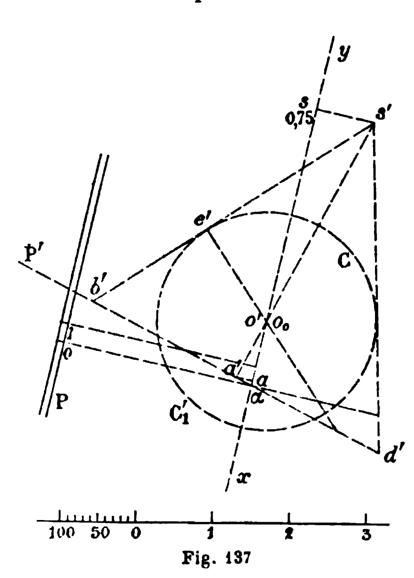


Fig. 137

(*) On obtient le point de contact e' de la tangente $s'b'$ en remarquant que le rayon $o'e'$ fait avec la droite $b'd'$ un angle égal au complément de l'angle $a'b's'$ qui n'est autre chose que l'angle θ.

est la circonférence située dans le plan de bout $\alpha P'$ et dont le diamètre est la droite $b'd'$. Le cône est donc déterminé.

Pour résoudre le problème proposé, il n'y aura qu'à mener par le point donné les plans tangents au cône que l'on vient de construire (90).

122. Problème. — *Mener un plan tangent à une sphère faisant avec deux plans donnés des angles donnés.*

On déterminera les deux cônes circonscrits à la sphère auxquels le plan doit être tangent pour faire avec les deux plans donnés les angles donnés (121) ; puis par la droite joignant les sommets des deux cônes on mènera un plan tangent à la sphère (111).

III. — Génératrices communes à deux cônes de révolution.

123. Génératrices communes à deux cônes de révolution de même sommet. — Soient SA l'axe du premier cône donné par son échelle de pente sa, 2λ son angle au sommet, SB l'axe du second cône donné par son échelle de pente sb, 2θ son angle au sommet (*fig.* 138) ; nous pouvons toujours supposer le sommet commun dans le plan de comparaison.

Coupons les deux cônes par une sphère de rayon arbitraire ayant pour centre leur sommet commun ; supposons ses deux projections confondues suivant le cercle C, puisque son centre est sur la ligne de terre. La surface du premier cône aura avec la surface de la sphère deux circonférences communes symétriques par rapport au centre de la sphère. Il en sera de même pour le second cône.

Les plans des deux circonférences appartenant au premier cône couperont les plans des deux circonférences communes au second cône et à la sphère suivant quatre droites deux à deux symétriques par rapport au centre de la sphère. Considérons deux de ces droites, intersections des plans des deux circonférences relatives au premier cône et du plan de l'une des circonférences relatives au second. Elles coupent la sphère chacune en deux points M, P, appartenant à la fois à l'une des circonférences relatives au premier cône et à l'une des circonférences relatives au second. Ces points sont donc à la fois sur les deux cônes, et les droites qui les joignent au sommet commun sont les génératrices

communes aux deux cônes. Les deux autres droites donneraient quatre points symétriques des précédents par rapport au centre de la sphère et par suite conduiraient aux mêmes génératrices communes. Il y a donc au plus quatre génératrices communes aux deux cônes. Pour les obtenir, nous prendrons les points d'intersection des deux droites précédentes et de la sphère et nous les joindrons au sommet commun des deux cônes.

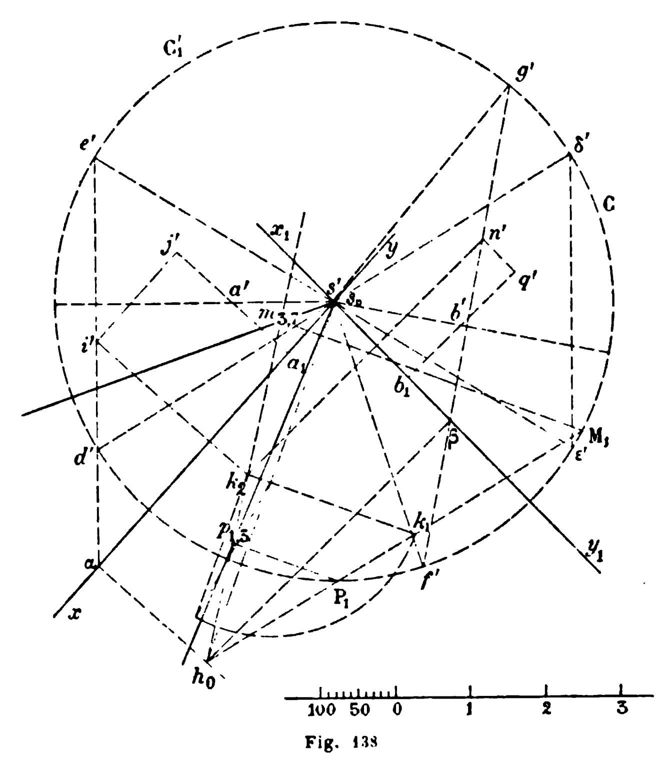


Fig. 138

Nous allons déterminer les plans des circonférences communes aux deux cônes et à la sphère.

Prenons d'abord comme plan vertical de projection le plan vertical xy projetant l'axe SA du premier cône.

La projection verticale de l'axe est la droite $s'a'$ et son contour apparent vertical se compose des deux droites $d's'\delta'$, $e's'\varepsilon'$ situées dans le plan vertical et faisant chacune avec la droite $s'a'$ un angle égal à l'angle λ. Le contour apparent vertical de la sphère est la circonférence C'_1.

Les plans des deux circonférences communes à la surface du cône et à la surface de la sphère sont les plans de bout qui ont pour traces verticales les droites $d'e'$ et $\delta'\varepsilon'$, et leurs diamètres sont les droites $d'e'$, $\delta'\varepsilon'$.

Pour déterminer le second cône, nous allons prendre un second plan vertical de projection : le plan projetant l'axe SB. Dans ce système, dont la ligne de terre est la droite x_1y_1, l'axe du cône a pour projection verticale la droite $s'b'$, et le contour apparent vertical se compose des deux génératrices $s'f'$, $s'g'$, situées dans le plan vertical et faisant avec la droite $s'b'$ chacune un angle égal à θ. L'une des circonférences communes à la surface du cône et à la surface de la sphère est dans le plan de bout dont la trace verticale, dans le système x_1y_1, est la droite $f'g'$, et elle a pour diamètre la longueur $f'g'$. Il est inutile de considérer la seconde circonférence commune à ce cône et à la sphère, car, comme nous l'avons dit plus haut, ses points d'intersection avec les deux circonférences relatives au premier cône seraient symétriques de ceux que nous allons déterminer par rapport au centre de la sphère, et par suite ne donneraient pas de génératrices communes aux deux cônes distinctes de celles que nous obtiendrons.

Il nous faut maintenant construire les droites d'intersection du plan de bout $f'g'$ et des plans de bout $d'e'$, $\delta'\varepsilon'$. Ces plans sont représentés il est vrai dans deux systèmes différents, mais ces deux systèmes ont le plan horizontal commun, de sorte que la méthode générale (23) nous permettra de construire les intersections cherchées. Prenons par exemple les plans de bout $d'e'$ et $f'g'$. Leurs traces horizontales se coupent au point h qui est le point de cote zéro de l'intersection. Pour en obtenir un second point, coupons les deux plans par le plan horizontal de cote 2. Ce plan auxiliaire a pour trace verticale dans le système xy la droite $i'j'$, il coupe le plan de bout $d'e'$ suivant la ligne de bout i'. Dans le système x_1y_1 ce même plan auxiliaire a pour trace verticale la droite $n'q'$, il coupe le plan de bout $f'g'$ suivant la ligne de bout n'. Les projections horizontales des deux lignes de bout i' et n' se coupent au point k qui est la projection du point de la droite cherchée ayant pour cote 2. L'intersection des plans de bout $d'e'$ et $f'g'$ est donc la droite hk. Enfin nous déterminons les points d'intersection de cette droite avec la sphère (107) ; nous obtenons le point M ayant pour cote 3,7 et le point P ayant pour cote 1,3. Les deux droites SM, SP sont deux génératrices communes aux deux cônes donnés.

On déterminerait de même l'intersection des deux plans de bout $\delta'\varepsilon'$, $f'g'$. Dans l'épure actuelle, on reconnait qu'elle ne coupe pas la sphère ; le problème n'a donc dans ce cas que deux solutions.

124. Applications. — 1° Le problème précédent est le même que le problème : *Étant données deux droites qui se coupent, mener par leur point d'intersection une droite faisant avec chacune d'elles un angle donné.*

2° On peut encore appliquer la solution du problème précédent à la *construction d'une droite passant par un point et faisant avec deux plans donnés des angles donnés.* C'est une génératrice commune à deux cônes de révolution ayant le point pour sommet commun, dont les axes sont perpendiculaires aux deux plans, et dont les demi-angles au sommet sont les compléments des angles donnés.

Exemple. — *Mener par un point* A *donné par sa projection* a *et sa cote égale à* 4,3 *une droite faisant avec le plan horizontal un angle donné* λ *et avec un plan vertical donné* V *un angle donné* θ.

Soient le point A et le plan vertical V (*fig.* 139). L'axe de l'un des deux cônes est la verticale a, et l'axe de l'autre est la perpendiculaire au plan V menée par le point A. Le plan des deux axes étant un plan vertical, nous le prendrons pour plan vertical de projection. La ligne de terre est la droite xy passant par le point a et perpendiculaire à la droite V. Nous supposons en même temps qu'on a élevé le plan de comparaison jusqu'au point A. La projection verticale de l'axe du cône relatif au plan horizontal est la droite $a'b'$ et son contour apparent vertical se compose

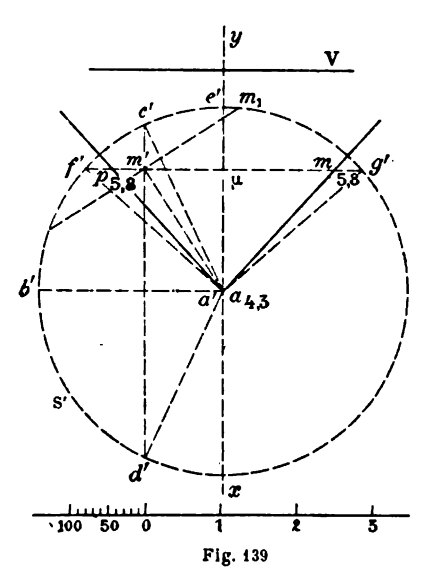


Fig. 139

des deux droites $a'c'$, $a'd'$, faisant avec la droite $a'b'$ chacune un angle

égal au complément de l'angle λ. L'axe du second cône $a'e'$ se confond avec la ligne de terre elle-même et son contour apparent vertical se compose des deux droites $a'f'$, $a'g'$, faisant chacune avec la droite $a'e'$ un angle égal au complément de l'angle θ. Coupons les deux cônes par une sphère dont le contour apparent vertical est le cercle S'. Les circonférences communes aux deux cônes et à la sphère sont dans les plans de bout $c'd'$, $f'g'$, et ont respectivement pour diamètres les longueurs de ces deux droites. La droite commune à leurs plans est la ligne de bout m'. Cette ligne de bout coupe la sphère en deux points projetés verticalement en m', et dont on obtient les éloignements en rabattant le plan de bout $a'm'$ autour de sa trace verticale. Cet éloignement est égal à $m'm_1$. Nous le portons sur la ligne de rappel du point m' de part et d'autre du point μ, ce qui nous donne les deux points m et p ayant pour cote $\mu m' + 4.3 = 5,8$. Les deux droites AM, AP répondent à la question.

EXERCICES

1\. — On donne dans le plan de comparaison un angle ASC. Par la droite AS on mène un plan P faisant avec le plan de comparaison un angle donné. Construire une droite SB située dans le plan P et faisant avec SC un angle donné. [Intersection d'un cône et d'un plan passant par le sommet (97)].

On peut énoncer ce problème : Construire un trièdre connaissant deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles.

2\. — On donne une droite SA dans le plan de comparaison. On mène par la droite SA un plan P faisant un angle donné A avec le plan de comparaison. Construire un plan passant par le point S, faisant avec le plan de comparaison un angle donné et avec le plan P un autre angle donné. On peut énoncer ce problème : construire un trièdre connaissant les trois dièdres.

3\. — Mener une droite rencontrant une verticale et faisant un angle donné α avec un plan donné. (N)

4\. — On donne un plan par son échelle de pente, un plan vertical et un point A. Mener par le point A une droite faisant des angles donnés avec les plans donnés. (N)

5. — On donne dans le plan de comparaison une droite xy qui est la trace d'un plan vertical et une droite cd. Faire passer par la droite cd un plan faisant un angle donné avec le plan vertical xy et graduer la projection horizontale de l'intersection des deux plans. (N)

6. — Mener par une verticale un plan faisant un angle donné avec un plan donné. (N)

7. — Mener par un point d'un plan une droite dans ce plan faisant un angle donné avec un plan vertical donné. (N)

8. — On donne un trièdre dont l'une des faces est dans le plan horizontal de cote zéro. Déterminer l'axe d'un cône de révolution passant par les trois arêtes. (N)

9. — On donne une sphère tangente au plan horizontal. Circonscrire à cette sphère un tétraèdre régulier SABC ayant sa base ABC dans le plan horizontal. — On mène à la sphère un plan tangent P faisant un angle donné avec le plan horizontal et perpendiculaire au plan de symétrie du tétraèdre passant par l'arête SA. Construire la section du tétraèdre par le plan P.

10. — On donne un plan $P\alpha P'$ par ses traces sur deux plans de projection rectangulaires, et un point A par ses deux projections. Mener par le point A un plan faisant un angle donné avec le plan $P\alpha P'$ et tel que son intersection avec ce plan fasse des angles égaux avec les deux traces αP et $\alpha P'$. — Il y a en général deux plans Q et R répondant à la question. Les plans $P\alpha P'$, Q et R forment un prisme. Représenter la partie de ce prisme comprise entre le plan horizontal et un plan horizontal quelconque.

11. — Mener par un point une droite tangente à une sphère et faisant un angle donné avec le plan horizontal. (N)

12. — On donne un cône de révolution dont l'axe est vertical et dont le sommet est dans le plan horizontal de cote zéro et une sphère tangente à ce plan horizontal. Mener un plan tangent commun au cône et à la sphère. (N)

13. — On donne une droite cotée et une verticale passant par la trace horizontale de cette droite. Mener par ce point une droite faisant des angles donnés avec les deux autres. (N)

14. — Deux droites cotées passent par un même point du plan horizontal. On considère le cône engendré par l'une tournant autour de l'autre. On donne la projection d'une génératrice; graduer cette droite. (N)

15. — On donne un plan P et une droite AB par leurs échelles de pente. Faire passer par la droite deux plans Q et R faisant avec le plan P un angle donné. — Construire la projection cotée d'un tétraèdre ayant trois faces dans les plans P, Q, R, et la quatrième dans un plan horizontal de cote donnée.

16. — On donne une droite L dans le plan horizontal. Par la droite L on fait passer un plan P faisant un angle donné avec le plan horizontal. On donne en outre un point A par sa projection cotée. Mener par le point A deux plans Q et R faisant chacun : avec le plan horizontal un angle donné, avec le plan P un autre angle donné. Mener par le point A un plan S perpendiculaire à l'intersection des plans Q et R. Construire le tétraèdre ayant pour faces le plan horizontal et les plans Q, R et S.

CHAPITRE VII

SECTIONS PLANES DU CONE DE RÉVOLUTION. — SECTION PLANE D'UN CONE OBLIQUE A BASE CIRCULAIRE. SECTION PLANE D'UNE SURFACE.

I. — Sections planes du cône de révolution.

125. On démontre en géométrie que la section d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par le sommet est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Nous supposerons que le lecteur connaît les propriétés essentielles de ces courbes. On démontre en outre que chacune de ces courbes se projette orthogonalement sur un plan suivant une courbe de même espèce (*). Nous allons exposer dans ce chapitre comment on construit cette projection.

Nature de la section. — Un point quelconque de la section est l'intersection du plan sécant et d'une génératrice du cône ; par conséquent, s'il n'existe aucune génératrice du cône parallèle au plan sécant, la courbe n'aura aucun point rejeté à l'infini et sera par suite une *ellipse*.

S'il existe deux génératrices du cône parallèles au plan sécant, la courbe aura deux points à l'infini dans deux directions différentes et sera une *hyperbole*. Enfin s'il n'existe qu'une seule génératrice du cône parallèle au plan sécant, la courbe aura un point à l'infini dans une seule direction et sera une *parabole*. Pour connaître le nombre des

---

(*) Voir une note de M. Charruit dans le *Journal de Vuibert* (20e année, n° 12).

génératrices parallèles au plan sécant, on mène par le sommet du cône un plan parallèle à ce plan, puis on détermine la droite d'intersection du plan ainsi obtenu et du plan de la directrice. Si cette droite ne coupe pas la directrice, le cône n'a aucune génératrice dans le plan parallèle au plan sécant et par suite n'a pas de génératrice parallèle au plan sécant. Si la droite coupe la directrice en deux points distincts, le plan parallèle au plan sécant coupe le cône suivant deux génératrices (97) et le cône a deux génératrices parallèles au plan sécant. Enfin si la droite est tangente à la directrice, le plan parallèle au plan sécant est tangent au cône (87) et le cône n'a qu'une seule génératrice parallèle au plan sécant.

Supposons en particulier que l'axe du cône soit vertical : soit C sa directrice dans le plan de comparaison, et soit *s* la projection du sommet S ayant pour cote 5,6 (*fig.* 140). Désignons par P le plan sécant donné par son échelle de pente. Le plan parallèle au plan P mené par le point S a pour échelle de pente la droite Q (53), et son intervalle est égal à celui du plan P. Soit S*a* la génératrice du cône qui se projette suivant la droite Q ; son intervalle est facile à déterminer puisque le point *a* a pour cote zéro et qu'elle contient le point S.

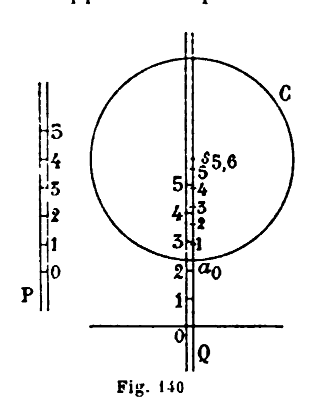


Fig. 140

Si l'intervalle de la droite S*a* *est plus petit que celui du plan* Q, *et par suite que celui du plan* P, le plan Q est plus incliné que la droite sur le plan de comparaison (43), l'horizontale de cote zéro du plan Q ne coupe pas la directrice du cône, le plan P n'est parallèle à aucune génératrice du cône et la section est une *ellipse*. C'est le cas de la figure.

Si l'intervalle de la droite S*a* *est plus grand que celui du plan* P, le plan Q coupe le cône suivant deux génératrices et la section est une *hyperbole*.

Si l'intervalle de la droite S*a* *est égal à celui du plan* P, le plan Q est tangent au cône et la section est une *parabole*.

126. Section elliptique. — Soit un cône de révolution dont l'axe est vertical et dont la directrice est la circonférence C dans le plan de

comparaison, le sommet S a pour cote 6. Soit P le plan sécant donné par son échelle de pente (*fig.* 141). Nous allons appliquer, pour obtenir un point de la section, la méthode qui consiste à déterminer le point d'intersection d'une génératrice quelconque du cône et du plan sécant (95).

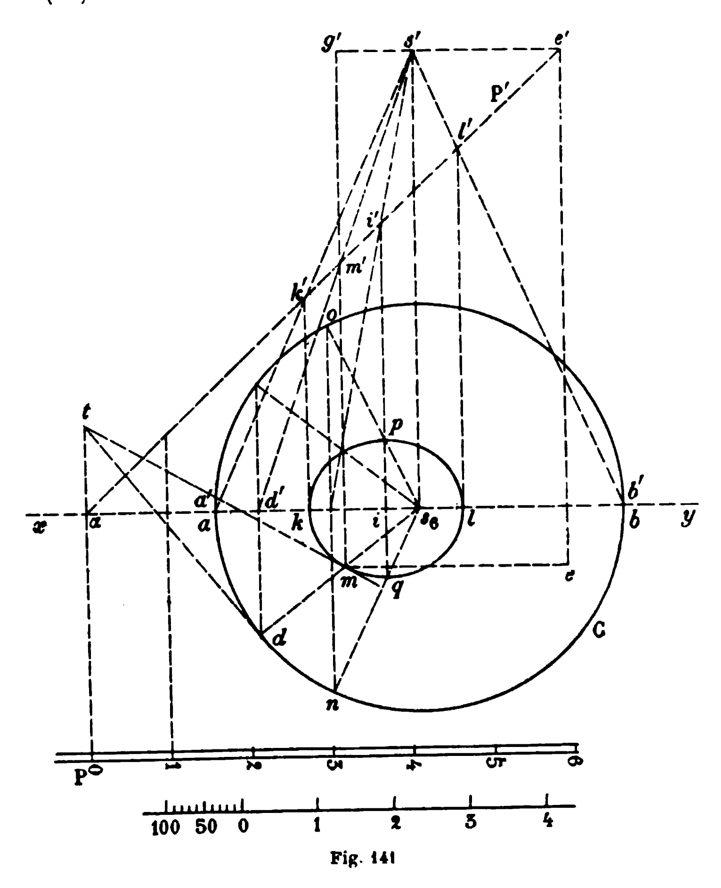


Fig. 141

Nous nous aiderons d'une élévation sur un plan vertical xy perpendiculaire au plan sécant ; nous l'avons choisi passant par l'axe du cône de sorte qu'il est plan de symétrie à la fois pour le cône et pour le plan P, et par suite pour la section qui se projettera suivant une courbe symétrique par rapport à la droite xy. La projection verticale du cône est le triangle $a's'b'$, et le plan sécant est représenté par ses traces αP et αP'.

Pour avoir une génératrice quelconque du cône, nous prenons un point (d, d') sur la directrice et nous le joignons par la droite $(sd, s'd')$ au point (s, s'). La génératrice $(sd, s'd')$ coupe le plan PαP' au point (m, m') (23), qui est un point de la section. La construction nous permet de démontrer, *dans le cas où l'axe du cône est vertical*, que la courbe formée par l'ensemble des points tels que le point m est une conique.

Menons les droites $s'e'$, me parallèles à la ligne de terre, et les droites mg', ee' perpendiculaires aux précédentes. Nous allons montrer que le point m décrit une conique ayant pour foyer le point s, projection du sommet du cône, et pour directrice la droite ee' dont la position ne dépend que du cône et du plan sécant et par suite est indépendante de celle du point m. Il suffit de démontrer que le rapport $\frac{ms}{me}$ ne dépend pas de la position du point m.

Appelons λ le demi-angle au sommet du cône, et θ l'angle du plan sécant et du plan de comparaison. ms est la projection de la portion de la génératrice SD comprise entre le point S et le point M. Par suite SM est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit MH (*fig.* 142) est égal à ms, tandis que l'autre SH est égal à $g'm'$, distance du point S au plan horizontal passant par le point M. D'ailleurs l'angle de ce triangle opposé au côté MH est égal à λ. On a donc

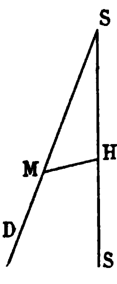


Fig. 142

$$MH = ms = g'm' \operatorname{tg} \lambda.$$

Or l'angle $g'e'm'$, égal à l'angle P'xy, est égal à θ. Donc le triangle rectangle $e'g'm'$ nous donne

$$e'g' = g'm' \cot \theta.$$

Mais $me = e'g'$, donc

$$\frac{ms}{me} = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cot \theta}$$

et la proposition est démontrée.

Tangente au point (m, m'). — La tangente à la courbe au point (m, m') est l'intersection du plan PαP' et du plan tangent au cône suivant la génératrice SD. Ce dernier plan est déterminé par la droite SD et la tangente dt à la directrice au point d. Cette tangente coupe la trace

horizontale du plan sécant au point t qui fait partie de l'intersection des deux plans. La tangente à la courbe au point (m, m') est la droite tm.

Axes de la courbe. — Les deux points (k, k'), (l, l') sont les points de la courbe situés sur les génératrices SA, SB, qui constituent le contour apparent vertical du cône. Les plans tangents au cône suivant ces génératrices sont des plans de bout qui coupent le plan PαP′ suivant des droites de bout; donc les tangentes à la courbe aux points k et l sont perpendiculaires à la ligne de terre; comme elles sont parallèles, la droite kl est un diamètre de la courbe, et, les tangentes aux points k et l étant perpendiculaires à ce diamètre, la droite kl est un axe de la courbe. Son milieu i en est le centre. L'autre axe est la perpendiculaire à la droite kl menée par le point i. Pour avoir les sommets situés sur cet axe, nous n'aurons qu'à déterminer les points de la courbe qui sont sur les génératrices projetées verticalement suivant la droite $s'i'$; ce sont les deux génératrices So, Sn qui nous donnent les deux sommets p et q.

Remarque. — Si la trace horizontale αP du plan sécant rencontre la directrice, les points où elle la coupe font partie de la courbe.

Grandeur de la section. — On obtiendra la grandeur de la section dans l'espace en rabattant le plan PαP′, soit sur le plan horizontal autour de αP, soit sur le plan vertical autour de αP′.

127. Section hyperbolique. — Soit C la directrice d'un cône de révolution dans le plan de comparaison; le sommet S du cône se projette au point s et a pour cote 3; P est l'échelle de pente du plan sécant (*fig.* 143). Nous faisons une élévation de la figure sur le plan vertical xy mené par l'axe du cône et perpendiculaire au plan sécant. On détermine un point quelconque de la section comme au paragraphe précédent, ainsi que la tangente en ce point. Les points k et l sont les deux sommets d'un axe qui est l'axe transverse puisqu'il contient le foyer s.

La trace horizontale αP du plan sécant nous donne les deux points f et q de la courbe.

Asymptotes. — Proposons-nous de déterminer les asymptotes de la courbe, c'est-à-dire les positions limites des tangentes aux points s'éloignant à l'infini (95). Ces points sont donnés par les génératrices du cône parallèles au plan sécant. Pour les déterminer, menons par

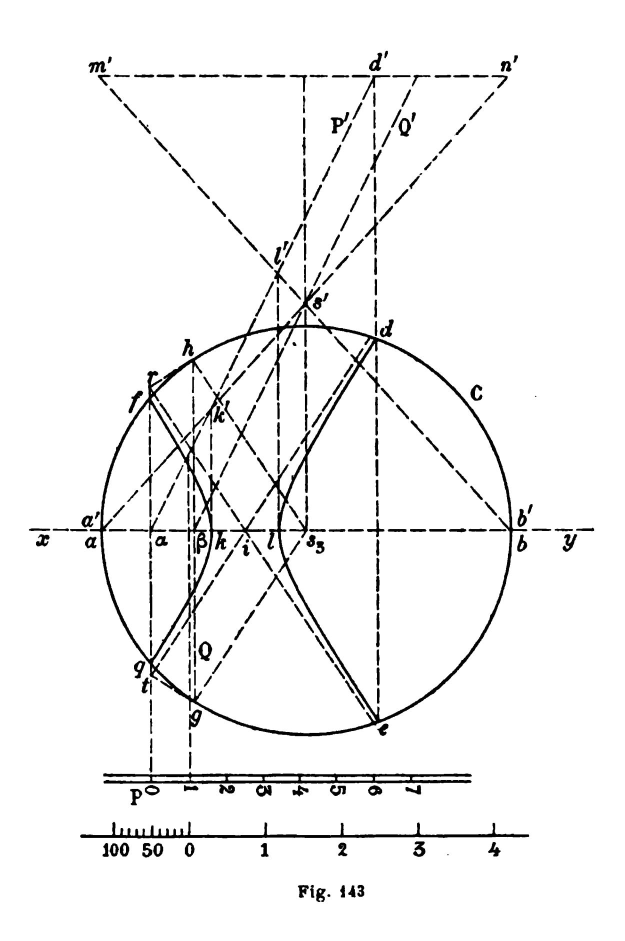


Fig. 143

le sommet du cône le plan QβQ' parallèle au plan PαP' ; il coupe le cône suivant les deux génératrices dont les projections horizontales sont les droites *sg* et *sh*. Les asymptotes seront les intersections du plan sécant PαP' et des plans tangents au cône suivant les génératrices S*g*, S*h*. La tangente à la directrice au point *g* coupe la trace hori-

zontale αP du plan au point t qui est un point de l'asymptote correspondante ; comme cette asymptote passe par le point rejeté à l'infini dans la direction sg, c'est la parallèle à la droite sg menée par le point t. L'autre asymptote est la parallèle à la droite sh menée par le point r obtenu d'une manière analogue à celle qui a donné le point t. Les deux asymptotes doivent se couper au centre de l'hyperbole, c'est-à-dire au point i milieu de la droite kl.

Les deux asymptotes étant déterminées, on peut achever de construire l'hyperbole par points, car on connaît deux points de l'hyperbole, les sommets k et l, et, connaissant les asymptotes d'une hyperbole AB, CD (*fig.* 144) et un point M de la courbe, on peut en déterminer autant de points que l'on veut par la construction que nous allons rappeler : par le point M on mène une droite quelconque ME rencontrant les deux asymptotes aux points E et F. On prend à partir de l'asymptote CD une longueur FN égale à EM, le point N est un point de l'hyperbole. Sur une droite telle que GH on prendra la longueur HP égale à GM pour avoir un point P de l'hyperbole.

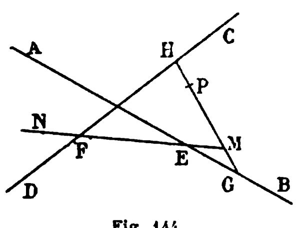


Fig. 144

Nous avons représenté la partie de la section comprise entre le plan de comparaison et un plan horizontal $m'n'$ symétrique du plan de comparaison par rapport au sommet du cône. Ce plan horizontal coupe le cône suivant une circonférence dont la projection horizontale est la circonférence C et le plan sécant suivant la ligne de bout d', qui nous donne les deux points d et e de la section.

Nous avons représenté le cône et la section en supposant le cône transparent.

128. Section parabolique. — Soit le cône S qui a pour directrice la circonférence C dans le plan horizontal et dont le sommet a pour cote 5 (*fig.* 145); supposons-le coupé par le plan P donné par son échelle de pente. L'intervalle du plan P est égal à l'intervalle de la génératrice Sa, de sorte que la section est une parabole. Nous faisons comme précédemment une élévation de la figure sur le plan vertical xy passant par l'axe du cône et perpendiculaire au plan

sécant. Le plan $P\alpha P'$ est parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice Sa, sa trace verticale $\alpha P'$ est par suite parallèle à la projection verticale $s'a'$ de cette génératrice. La projection verticale du sommet de la courbe est le point k' d'intersection de la trace verticale du plan sécant avec la génératrice $s'b'$, car on verrait comme précédemment que la tangente à la courbe au point k est perpendiculaire à la droite

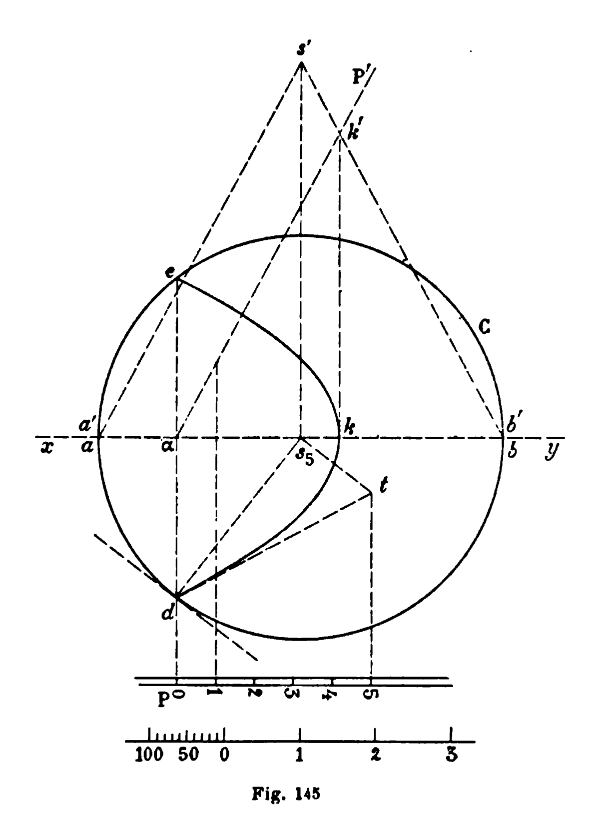


Fig. 145

sk qui joint le foyer au point de contact. La parabole est bien déterminée puisqu'on connait son foyer s et son sommet k. Les deux points d et e où la trace horizontale αP du plan sécant coupe la directrice C du cône font partie de la courbe. Nous avons construit la tangente dt au point d en déterminant l'intersection du plan P et du plan tangent au cône au point d, la droite st est l'horizontale 5 de ce dernier plan.

Remarque. — La méthode que nous venons d'appliquer à la détermination des sections planes du cône de révolution n'exige nullement que l'axe du cône soit vertical. C'est la méthode générale qui sert à déterminer la section par un plan d'un cône ou d'un cylindre (95). Pour l'appliquer, il suffit de construire une directrice de la surface. Si l'axe de la surface est quelconque, on pourra faire une élévation de la figure sur le plan vertical projetant cet axe comme nous l'avons fait au paragraphe 115. La directrice est alors dans un plan de bout qu'on rabat sur le plan vertical pour effectuer les constructions qui exigent la connaissance de la directrice.

II. — Section plane d'un cône oblique à base circulaire.

129. Pour construire la section plane d'un cône de révolution dont l'axe est vertical, au lieu de procéder comme nous l'avons fait, on aurait pu couper le cône et le plan sécant par des plans horizontaux, appliquant d'ailleurs la méthode employée pour construire la section plane d'une surface de révolution (103). Chaque plan horizontal auxiliaire coupe le cône suivant une circonférence se projetant suivant une circonférence égale, et le plan sécant suivant une horizontale. Les points communs à la projection de cette horizontale et à la circonférence correspondante sont des points appartenant à la projection de la section plane.

Cette méthode peut être employée toutes les fois que les sections d'une surface par des plans horizontaux sont des circonférences et qu'on se propose de construire la projection de la section de cette surface par un plan.

Nous prendrons comme exemple un cône oblique à base circulaire dont la directrice C est dans le plan horizontal, et dont le sommet S, projeté au point s, a pour cote 9 (*fig.* 146). Soit P le plan sécant donné par son échelle de pente. Prenons comme plan vertical de projection le plan vertical xy passant par l'axe SO du cône.

Le contour apparent vertical du cône se compose des deux génératrices $(sa, s'a')$, $(sb, s'b')$, et le plan est représenté par ses traces αP, αP'. Le plan horizontal auxiliaire H', ayant pour cote 3, coupe le plan

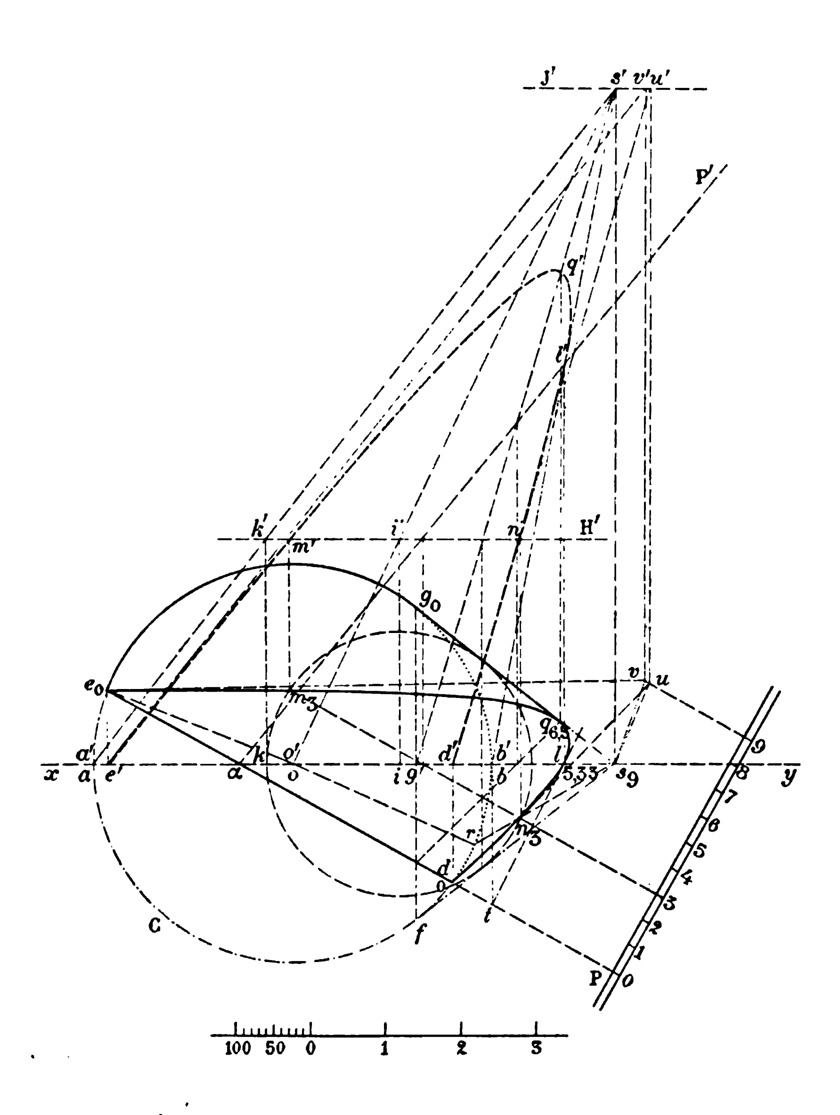


Fig. 146

$P\alpha P'$ suivant l'horizontale $(mn, m'n')$ et le cône suivant une circonférence ayant pour centre le point i' sur la droite $s'o'$ et pour rayon $i'k'$. Cette circonférence se projette suivant la circonférence ik qui coupe l'horizontale mn aux deux points m et n qui sont deux points de la projection horizontale de la section ; ils se projettent verticalement en m' et n' sur la droite H'.

Nous construisons la tangente au point (n, n') en déterminant l'intersection du plan P et du plan tangent au cône suivant la génératrice SNr. Comme le point d'intersection de la tangente à la directrice au point r avec la trace horizontale αP du plan sécant se confond presque avec la circonférence et que par suite la tangente serait ainsi peu aisée à dessiner, nous avons pris le point d'intersection u des horizontales de cote 9 du plan sécant et du plan tangent ; cette dernière passe par le point s et est parallèle à la tangente au point r à la circonférence C. $u'n'$ est la tangente à la projection verticale de la courbe au point n'.

Les points d et e où la trace horizontale αP coupe la circonférence C font partie de la courbe, ils se projettent verticalement aux points d' et e'.

Nous déterminons les tangentes en ces points en ayant encore recours aux horizontales de cote 9. La tangente au point (e, e') est la droite $(ve, v'e')$.

Le point (l, l') où la trace verticale du plan sécant coupe le contour apparent vertical du cône est un point de la section ; la tangente au point l à la projection horizontale de la courbe est la droite tl, à la projection verticale c'est le contour apparent $s'b'$ lui-même.

Les projections horizontales des génératrices de contour apparent horizontal sont les tangentes sf, sg, menées à la directrice C par la projection horizontale du sommet. Elles se projettent verticalement suivant la droite $s'g'$. Le point d'intersection (q, q') de la génératrice $(sg, s'g')$ et du plan sécant est un point de la courbe situé sur le contour apparent horizontal ; la projection horizontale de la courbe est tangente au point q à la droite sg (86).

D'autres plans horizontaux auxiliaires nous donneront de nouveaux points de la courbe ; il n'y aura plus qu'à joindre tous les points déterminés par un trait continu.

Remarquons que toutes les circonférences telles que la circonférence ik sont tangentes aux projections des génératrices de contour apparent

horizontal (86) ; les points de contact se projettent verticalement au point d'intersection de la droite $s'g'$ et de la trace verticale du plan horizontal auxiliaire correspondant.

Ponctuation. — Proposons-nous de représenter *la projection cotée de la partie solide du cône comprise entre le plan de comparaison et le plan sécant.*

Elle est limitée sur le plan de comparaison par la trace horizontale *de* du plan sécant et par la portion *dge* de la directrice. Dans le plan sécant elle est limitée par la portion de courbe *dqe*. Enfin la portion *gq* de génératrice est contour apparent horizontal du solide. L'arc *dbg* de la directrice est caché par la partie supérieure du solide. L'arc *dlq* de la courbe serait caché par la partie du cône située au-dessus du plan P, mais comme cette partie du cône est supposée enlevée, cet arc de courbe redevient vu.

Nous avons représenté la projection verticale de la courbe en trait discontinu parce que c'est une projection dans un système auxiliaire (69).

III. — Section plane d'une surface.

130. Procédé général pour obtenir l'intersection d'une surface par un plan. — Soit S la surface et P le plan. Pour obtenir un point commun à la surface et au plan on les coupe par un plan auxiliaire Q choisi de manière à couper la surface suivant une courbe C dont la projection soit aisée à construire (nous supposons que cela soit possible). Le plan Q coupe le plan P suivant une droite I. Les points communs à la droite I et à la courbe C sont des points communs à la surface S et au plan P, car, étant sur la courbe C, ils sont sur la surface, et, comme ils sont sur la droite I, ils sont dans le plan P. L'emploi de différents plans auxiliaires donne autant de points de l'intersection que l'on veut. Il n'y a plus qu'à les joindre par un trait continu.

On a soin de déterminer, quand cela est possible, les points sur les contours apparents et, en général, les points qui occupent une position remarquable.

Nous avons construit les sections planes des cônes et des cylindres en déterminant les points d'intersection des génératrices et du plan

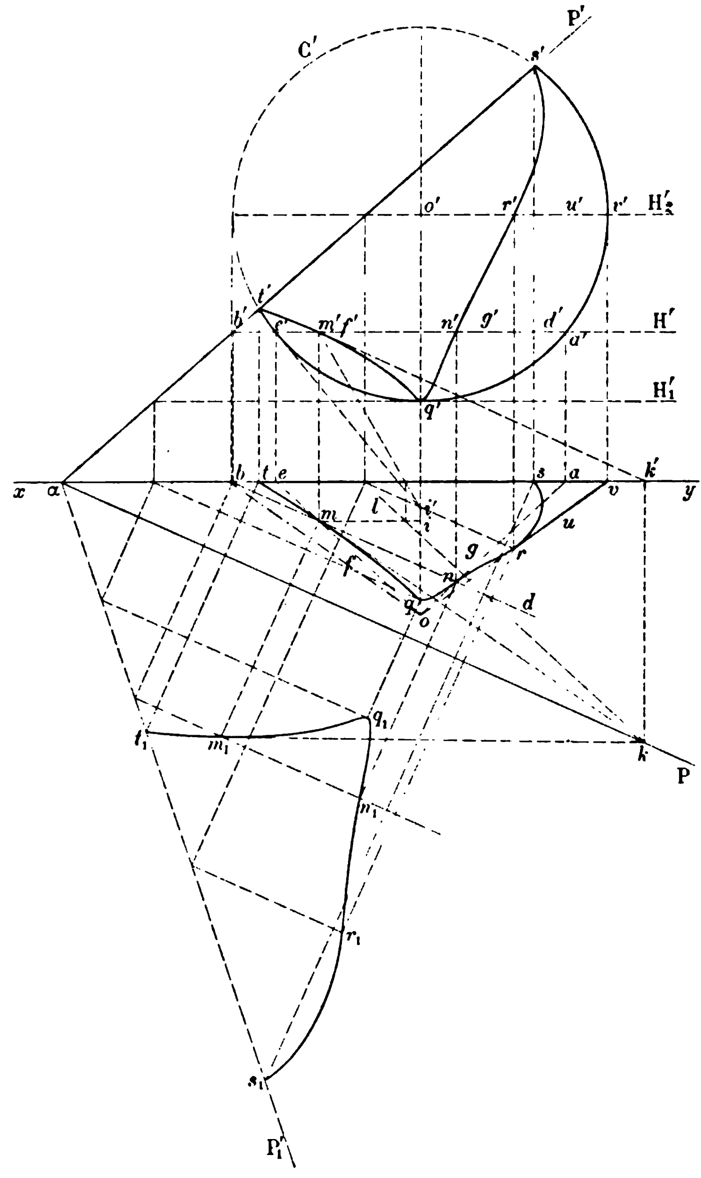

P'
C'
s'
o'
r'
u'
v'
H'2
t'
b'
m'
f'
n'
g'
d'
H'
a'
q'
H'1
x
a
b
t
e
s
a
k'
y
v
m
l
i
u
g
r
f
n
q
o
d
q1
t1
m1
k
P
n1
r1
s1
P'1

Fig. 147

sécant (95). Dans ce cas les plans auxiliaires Q sont les plans passant par les génératrices à l'aide desquels on détermine leurs points d'intersection avec le plan sécant. Cette méthode peut s'appliquer à toute surface engendrée par une droite qui se meut suivant une loi déterminée (surfaces réglées).

Proposons-nous, par exemple, de *construire la section par un plan* $P\alpha P'$ *déterminé par ses traces d'une surface engendrée par une droite assujettie aux conditions suivantes : 1° être parallèle au plan horizontal ; 2° rencontrer dans chacune de ses positions une verticale donnée o, et une circonférence C' donnée dans le plan vertical* (*fig.* 147).

Une génératrice quelconque de la surface est une horizontale (ag, $a'g'$) dont la projection horizontale passe par le point o, puisque la génératrice doit rencontrer la verticale, et qui contient un point (a, a') arbitrairement choisi sur la circonférence. On obtiendra son point d'intersection avec le plan $P\alpha P'$ à l'aide du plan horizontal auxiliaire H' passant par la génératrice. Il coupe le plan sécant suivant une horizontale (bd, $b'd'$) qui coupe la génératrice au point (n, n') appartenant à la section. Le même plan auxiliaire nous donne un second point (m, m') de la section sur la génératrice (ef, $e'f'$).

Le plan auxiliaire H'_1 nous donne le point (q, q'). Le plan auxiliaire H'_2 nous donne le point (r, r') sur la génératrice de contour apparent horizontal (ov, $o'v'$). La trace verticale du plan $\alpha P'$ coupe la circonférence directrice aux deux points (t, t'), (s, s') qui font partie de la section. En rabattant le plan $P\alpha P'$ sur le plan horizontal (35), la section se rabat suivant la courbe $s_1r_1n_1q_1m_1t_1$. On obtient ainsi la forme et la grandeur de la courbe de l'espace.

Nous avons représenté la partie solide de la surface comprise entre le plan vertical et le plan sécant sur les deux plans de projection.

La surface que nous venons d'envisager est un *conoïde droit.*

Remarque I. — On peut, dans l'exemple précédent, déterminer la tangente à la section en un point quelconque.

Nous allons montrer d'abord que les sections de la surface par des plans de front sont des ellipses.

Soient H le plan horizontal, OA la verticale que rencontre chaque génératrice, C la directrice dans le plan vertical (*fig.* 148). Coupons la surface par un plan de front F. La droite GM est l'intersection du

plan de front et du plan de profil AOBL. Soit K un point quelconque de la section. Menons par ce point un plan horizontal qui coupe le plan de profil suivant la droite EL et le plan vertical de

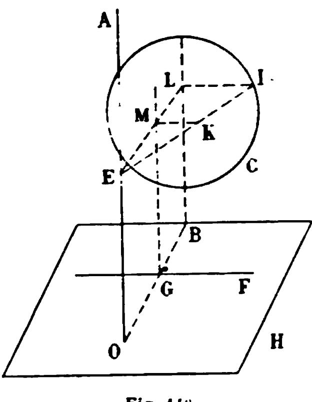


Fig. 148

projection suivant la droite LI. Traçons la droite KM perpendiculaire à la droite EL. Les triangles semblables EKM, EIL nous donnent

$$\frac{KM}{IL} = \frac{EM}{EL}.$$

Le second rapport ne dépend que de la position du plan F ; il est donc constant pour tout point K de la section. Il en résulte que la section est une ellipse qui se projette verticalement suivant une ellipse égale ayant pour demi-grand axe $o'q'$ et pour cercle principal le cercle C'.

Cela posé, proposons-nous de construire le plan tangent à la surface au point (m, m') par exemple. Ce plan contient d'abord la génératrice $(me, m'e')$ qui est une horizontale ; en outre, la tangente à l'ellipse, section de la surface par le plan de front F, est une frontale du plan. Cette tangente est la droite $(mi, m'i')$ (68). La trace horizontale du plan tangent est la droite kl.

La tangente à la section au point (m, m') sera la droite $(km, k'm')$. Elle se rabat suivant la tangente km_1.

Remarque II. — Pour construire la section plane d'une surface de

révolution dont l'axe est vertical, nous avons employé comme plans auxiliaires Q des plans horizontaux qui coupent la surface suivant des circonférences (103).

EXERCICES

1. — On donne une sphère tangente au plan horizontal et un point S. Construire le contour apparent du cône de sommet S et circonscrit à la sphère. Trouver la trace horizontale de ce cône. — Déterminer les éléments de cette trace. (X)

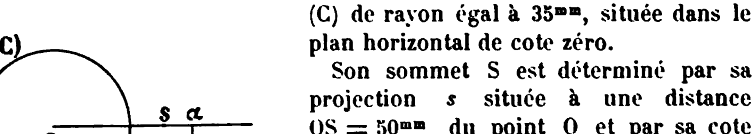
2. — Construire la section par un plan donné par son échelle de pente d'un cylindre ou d'un cône de révolution dont l'axe est horizontal. (X)

3. — Etant données deux droites graduées, prendre sur l'une d'elles un point situé à une distance donnée de l'autre. (X)

4. — On donne deux parallèles cotées; on considère le cylindre engendré par l'une tournant autour de l'autre. Construire la trace de ce cylindre sur le plan horizontal. (X)

5. — On donne une droite cotée qui engendre un cône en tournant autour de la verticale d'un de ses points. Une autre droite représente l'échelle de pente d'un plan, et l'on donne sur cette droite le point coté zéro. Graduer cette échelle de pente à partir de ce point de manière que le plan coupe le cône suivant une parabole. Construire le sommet de la parabole. (X)

6. — Un cône oblique à base circulaire a pour base une circonférence (C) de rayon égal à 35^{mm}, située dans le plan horizontal de cote zéro.



Son sommet S est déterminé par sa projection s située à une distance $OS = 50^{mm}$ du point O et par sa cote égale à 109^{mm}.

a est la projection horizontale d'un point A de cote égale à 30^{mm}. La distance $a\alpha$ au plan vertical OS est égale à 40^{mm}, et la distance $O\alpha$ à 60^{mm}.

Mener par le point A un plan qui détermine dans le cône donné une

section antiparallèle (C'). Construire la projection horizontale de cette section, déterminer ses axes et les points qui se trouvent sur le contour apparent du cône.

Construire les projections des sphères passant : 1° par la base (C) et le sommet S ; 2° par la circonférence (C') et le sommet S ; 3° par les deux circonférences (C) et (C').

Les plans d'intersection de ces trois sphères prises deux à deux se coupent suivant une même droite, la déterminer.

(*École navale, 1894.*)

CHAPITRE VIII

INTERSECTION DE DEUX SURFACES. — REPRÉSENTATION DU SYSTÈME DE DEUX CORPS.

---

131. Procédé général pour trouver l'intersection de deux surfaces. — Soient S et S_1 les deux surfaces. Pour obtenir un point de leur intersection, on les coupe par une surface auxiliaire Σ. On détermine les courbes d'intersection de la surface Σ et des surfaces S et S_1, les points communs à ces deux courbes sont des points appartenant à la ligne d'intersection des deux surfaces S et S_1. En faisant varier la position de la surface Σ, on obtient autant de points que l'on veut de l'intersection demandée. Le problème n'est d'ailleurs possible que si l'on peut trouver des surfaces auxiliaires Σ dont on sache déterminer les courbes d'intersection avec les surfaces S et S_1.

Si l'on doit construire l'intersection de deux polyèdres, on détermine les droites d'intersection des plans des faces de l'un avec ceux des faces de l'autre ; les surfaces Σ sont dans ce cas les plans auxiliaires que l'on emploie pour trouver les intersections de ces plans deux à deux ; mais c'est alors un cas particulier, car l'intersection se compose d'un ensemble de côtés rectilignes et c'est successivement à la détermination de chaque côté que s'applique la méthode.

Dans le cas d'un polyèdre et d'une surface courbe, la méthode s'applique à la détermination des sections de la surface par chaque face du polyèdre. Les surfaces auxiliaires sont encore des plans (130).

S'il s'agit de deux surfaces courbes, la nature des surfaces Σ dépend naturellement des surfaces données. S'il existe des plans dont on puisse facilement construire les intersections avec les deux surfaces données, on les choisira comme plans auxiliaires ; si en particulier les

sections horizontales des surfaces sont des droites ou des circonférences, on les coupera par des plans horizontaux.

Si l'une des surfaces est un ensemble de droites, on peut chercher les points d'intersection des droites qui la composent avec l'autre surface.

Nous allons donner un exemple de la recherche de l'intersection d'un polyèdre et d'une surface courbe, et nous traiterons ensuite un cas très simple d'intersection de deux surfaces courbes ; nous y joindrons quelques explications sur la représentation d'un système de deux corps ou de deux surfaces.

132. Problème. — *On donne la projection cotée d'un tétraèdre* SABC. *La face* SBC *est un triangle rectangle situé dans le plan de comparaison. La face* ABC *est dans un plan vertical et le point* A *a pour cote* 7 (*fig.* 149). *Une sphère a pour centre le point* D *milieu de la droite* SC, *son rayon est égal à de. Représenter le système des deux corps solides.*

Il faut d'abord construire l'intersection du tétraèdre et de la sphère. La face *sbc* du tétraèdre, située dans le plan de comparaison ainsi que le contour apparent de la sphère, coupe cette circonférence aux points *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*. La face ABC coupe la sphère suivant une circonférence qui a pour projection la portion de droite *op*. Le plan de la face SBA coupe la sphère suivant une circonférence dont nous avons construit la projection en choisissant le plan vertical x_1y_1 perpendiculaire au plan sécant et passant par le centre de la sphère comme plan vertical de projection. La trace verticale du plan SAB est $\alpha a'_1$ et les sommets du petit axe de l'ellipse sont les points *f* et *g* (108).

La partie utile de cette ellipse se compose des arcs *mt* et *nu*. De même l'intersection de la sphère et du plan SAC se projette suivant une ellipse obtenue à l'aide du plan vertical x_2y_2 et dont les arcs *rt* et *qu* font partie de l'intersection cherchée. Nous avons construit exactement les points *t* et *u* d'intersection de la droite SA et de la sphère (107), et nous avons vérifié leurs cotes 1,3 et 3 par le procédé arithmétique.

Ponctuation.— On commence par établir la ponctuation de chacun des solides comme s'il était seul. Dans le cas de notre épure, le tétraèdre tout entier devrait être représenté vu ainsi que la sphère. Considérons maintenant l'ensemble des deux solides. Les portions *mn*, *qr*, *tu* des arêtes du tétraèdre sont à l'intérieur de la sphère ; dans la masse du corps solide que l'on représente elles ne sont plus des lignes

de séparation et par suite elles doivent être considérées comme enlevées et représentées en trait mixte. Il en serait de même de la portion *op* de l'arête BC ; mais les arêtes AB et AC extérieures à la sphère limitent une partie du solide et, comme rien ne les cache, leur projection

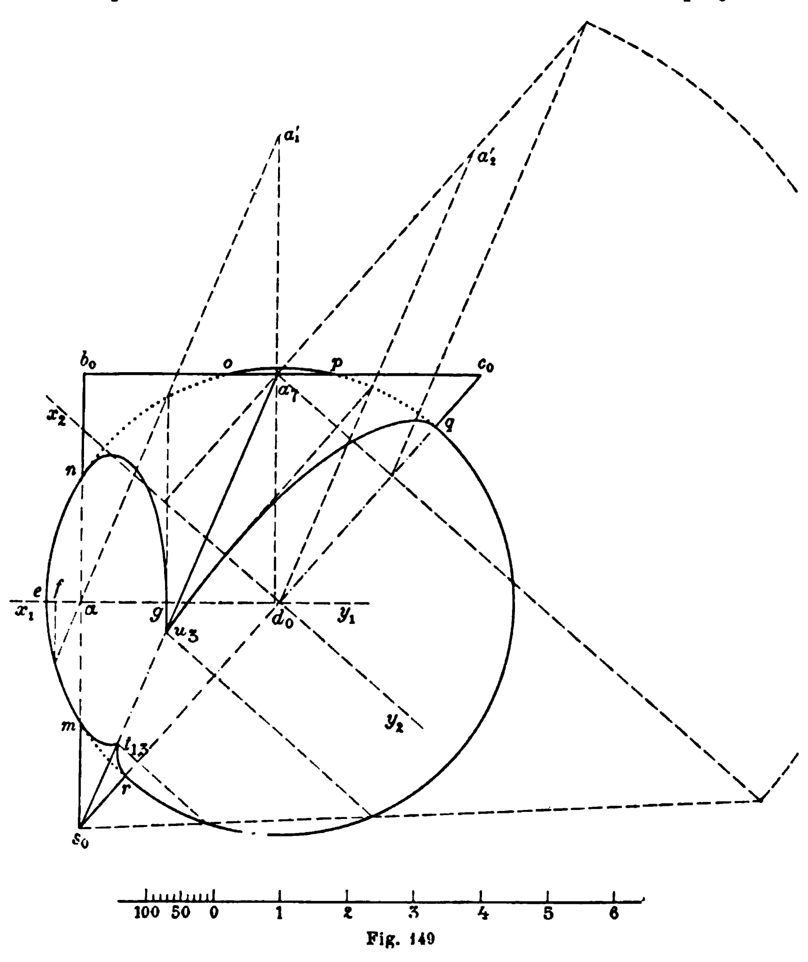


Fig. 149

bc doit être représentée en trait plein. Les arcs d'ellipse sont les projections d'arcs de cercle qui séparent la partie supérieure de la surface courbe du solide de la partie supérieure de sa surface plane ; ils sont vus à la fois sur le tétraèdre et sur la sphère. Les arcs *mr*, *no*, *pq* séparent la partie inférieure de la surface courbe du solide de la partie inférieure de sa surface plane. Ils sont cachés par la partie supérieure

du solide et doivent être par suite représentés en trait pointillé. Les portions d'arêtes du tétraèdre extérieures à la sphère sont vues.

Si l'on voulait représenter le *système des surfaces opaques des deux corps*, il faudrait supposer que la surface de chaque corps subsiste à l'intérieur de l'autre et rétablir les portions d'arêtes *mn*, *tu*, *qr*, qui limitent les faces du tétraèdre. Seulement, ces lignes sont cachées et doivent être représentées en trait pointillé et non plus en trait mixte (*fig.* 150).

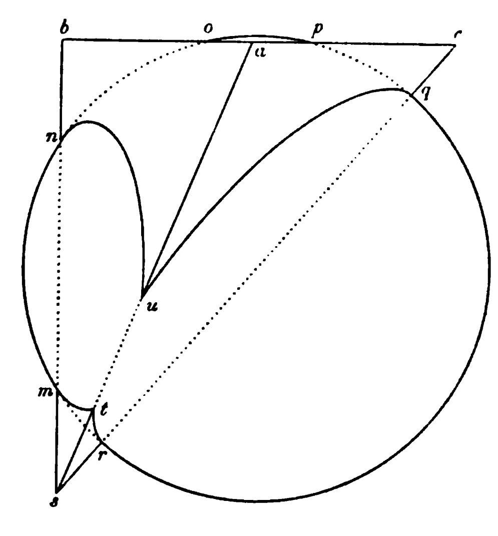


Fig. 150

On pourrait représenter le *solide commun* au tétraèdre et à la sphère. Alors il faudrait supposer enlevées toutes les parties de la sphère extérieures au tétraèdre, ainsi que les parties du tétraèdre extérieures à la sphère (*fig.* 151). Les portions d'arêtes *sm*, *st*, *sr*, *nb*, *ua*, *qc* seraient enlevées, ainsi que les arcs *mn*, *op*, *qer* du contour apparent de la sphère. Les arcs *mr*, *no*, *pq* limiteraient le solide et cesseraient d'être cachés par les parties supposées enlevées du tétraèdre. De même les portions d'arêtes *mn*, *tu*, *qr* n'étant plus cachées par la sphère, redeviendraient vues. Enfin les arcs d'ellipses sépareraient les par-

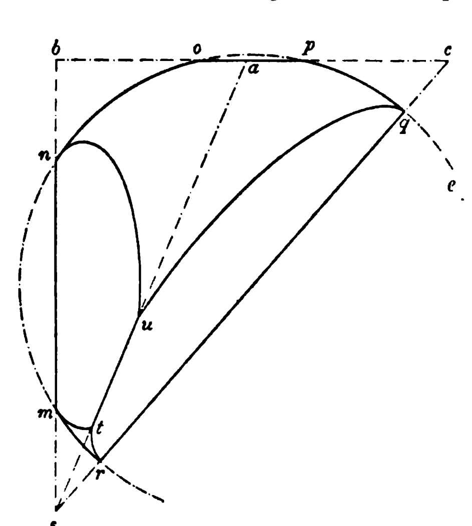


Fig. 151

ties de la surface du solide commun appartenant au tétraèdre de celles qui appartiennent à la sphère ; elles seraient d'ailleurs vues comme précédemment.

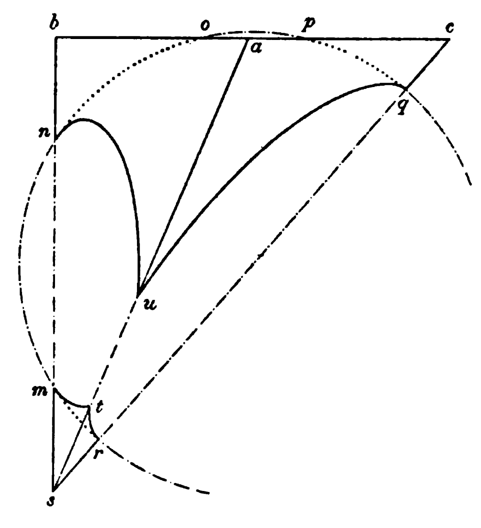


Fig. 152

Proposons-nous, comme dernier exemple, de représenter la *surface opaque du tétraèdre extérieure à la sphère.*

On supposera la sphère complètement enlevée, puis on enlèvera les portions d'arête du tétraèdre intérieures à la sphère (*fig.* 152). Les arcs *mr*, *no*, *pq* limitent les portions restantes de la face *sbc* ; ils sont d'ailleurs cachés par la partie supérieure de la surface du tétraèdre extérieure à la sphère.

133. Problème. — *Construire la courbe d'intersection du tore engendré par le cercle (ij, i'j') tournant autour de la verticale o et de la surface engendrée par une droite assujettie à rester parallèle au plan horizontal et à rencontrer dans chacune de ses positions la verticale s et la circonférence située dans le plan vertical de projection, ayant pour centre le point b' et pour rayon b'c' (fig.* 153).

Le contour apparent horizontal du tore se compose des deux circonférences *oj* et *oi* et son contour apparent vertical des deux circonférences *i'j'*, $\lambda'\nu'$, et des parallèles à la ligne de terre *g'h'*, $\mu'\theta'$. Le contour apparent horizontal du conoïde (130) se compose des projections horizontales des deux génératrices SK, SP, et son contour apparent vertical de la circonférence *j'c'*.

Nous emploierons comme plans auxiliaires des plans horizontaux. Un plan horizontal H' coupe le tore suivant deux parallèles projetés horizontalement suivant les deux circonférences *od*, *oe*, et le conoïde suivant deux génératrices dont les projections horizontales sont *sf* et *sv*. Ces deux génératrices coupent les deux circonférences en quatre

points qui se projettent verticalement sur la droite H'. L'un d'eux est le point (m, m'). En répétant cette construction sur un nombre suffisant de plans auxiliaires et joignant les points obtenus par un trait continu on obtient, en projection horizontale, les arcs de courbe *stump*, *srn*, *lqk*, et, en projection verticale les arcs $k'q'l'$, $n'r's't'\varepsilon'u'm'p'$, et leurs symétriques par rapport à la droite $i'a'$, car les deux surfaces sont symétriques par rapport au plan horizontal qui a cette droite pour trace verticale.

Le plan horizontal $i'a'$ nous donne les points k, p, s, l, n, situés sur le contour apparent horizontal. En ces points les plans tangents aux deux surfaces sont verticaux et par suite, dans l'espace, les tangentes à la courbe d'intersection sont verticales. Il en résulte que les tangentes à la projection verticale de l'intersection aux points k', p', s', l', n' sont perpendiculaires à la ligne de terre. En projection horizontale, les tangentes de l'espace se projettent suivant des points; nous ne pouvons donc pas en déduire les tangentes à la projection horizontale de la courbe en ces points. Pour le point s cependant, nous pouvons remarquer que les génératrices sk et sp sont les positions vers lesquelles tendent les génératrices de la surface qui donnent les points voisins du point s, et comme ces génératrices sont les cordes passant par le point s, les tangentes au point s sont les droites sp et sk. Nous verrons en outre tout à l'heure qu'on peut déterminer les tangentes en des points aussi voisins que l'on voudra des points k, l, n, p, de sorte que la forme de la courbe en ces points sera suffisamment bien déterminée.

Les plans horizontaux $g'h'\mu'\theta'$ coupent le tore suivant deux cercles qui ont pour projection horizontale le cercle gh; ils coupent le conoïde suivant les génératrices dont les projections horizontales sont sq et su. On obtient ainsi quatre points Q, R, T, U sur la circonférence supérieure, et les points symétriques sur la circonférence inférieure $\mu'\theta'$. En ces points les plans tangents au tore sont les plans horizontaux $g'h'$ et $\mu'\theta'$ eux-mêmes. Comme les plans tangents au conoïde passent par les génératrices, ils coupent les plans $g'h'$, $\mu'\theta'$ suivant ces génératrices, qui sont les tangentes à l'intersection en ces points. La projection horizontale de l'intersection est donc tangente, aux points q et r, à la droite sq, et, aux points t et u, à la droite su. Aux projections verticales de ces quatre points, la projection verticale de l'intersection est tangente à la droite $g'h'$.

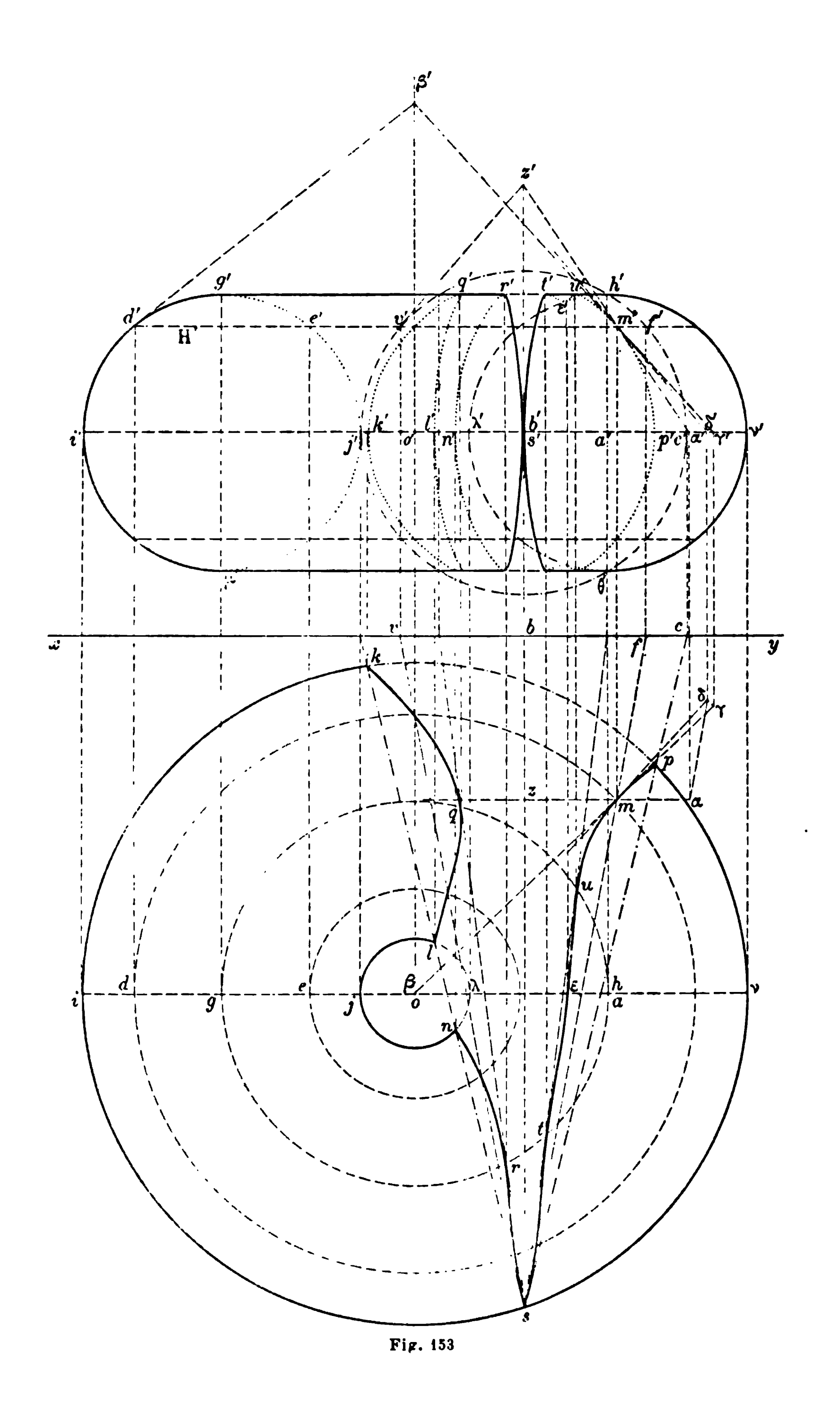


Fig. 153

La tangente à l'intersection des deux surfaces, en l'un de ses points, est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point. Nous savons déterminer le plan tangent au tore (101) et nous avons vu (130) comment on peut obtenir le plan tangent au conoïde ; nous pourrons donc construire la tangente en un point quelconque de l'intersection. Déterminons par exemple la tangente au point (m, m'). Le plan tangent au tore est déterminé par la tangente à la circonférence od au point m qui est une horizontale du plan (nous ne l'avons pas figurée) et par la tangente à la méridienne $(\beta m, \beta' m')$ (101). Le plan tangent au conoïde contient d'abord la génératrice projetée horizontalement suivant sf qui est une horizontale du plan, puis la tangente à l'ellipse section de la surface par le plan de front $m\alpha$. Cette tangente rabattue suivant $v'z'$ (130) est la droite $(z\alpha, z'\alpha')$. Pour trouver un point de l'intersection des deux plans autre que le point (m, m'), nous les coupons par le plan horizontal $i'j'$. Il coupe le plan tangent au tore suivant l'horizontale $\gamma\delta$ parallèle à la tangente au point m à la circonférence od et par suite perpendiculaire à la droite om, et le plan tangent au conoïde suivant l'horizontale $\alpha\delta$ parallèle à la droite sf. Le point (δ, δ') est un point de la tangente qui est la droite $(\delta m, \delta' m')$. Le plan de front io coupe le tore suivant les deux circonférences formant le contour apparent vertical et le conoïde suivant une ellipse. La circonférence $\lambda'\nu'$ coupe l'ellipse en deux points symétriques par rapport au plan horizontal $i'j'$. En ces points la projection verticale de l'intersection est tangente à la circonférence $a'\lambda'$ puisqu'ils sont sur le contour apparent vertical. Le plus élevé de ces deux points est le point $(\varepsilon, \varepsilon')$. On peut les construire avec la règle et le compas, car le centre a' de la circonférence est sur l'un des axes de l'ellipse (*).

Ponctuation. — Proposons-nous de représenter *la partie solide du tore extérieure au conoïde.*

PROJECTION HORIZONTALE. — L'arc kp de la circonférence oi est intérieur au tore, il doit être supposé enlevé et représenté en trait mixte, il en est de même du plus petit arc ln de la circonférence oj.

(*) En supposant l'ellipse rapportée à ses axes, si on forme l'équation aux ordonnées des points d'intersection de cette courbe et d'une circonférence dont le centre est sur l'axe des y, on obtient une équation du second degré dont on peut, par conséquent, construire les racines avec la règle et le compas.

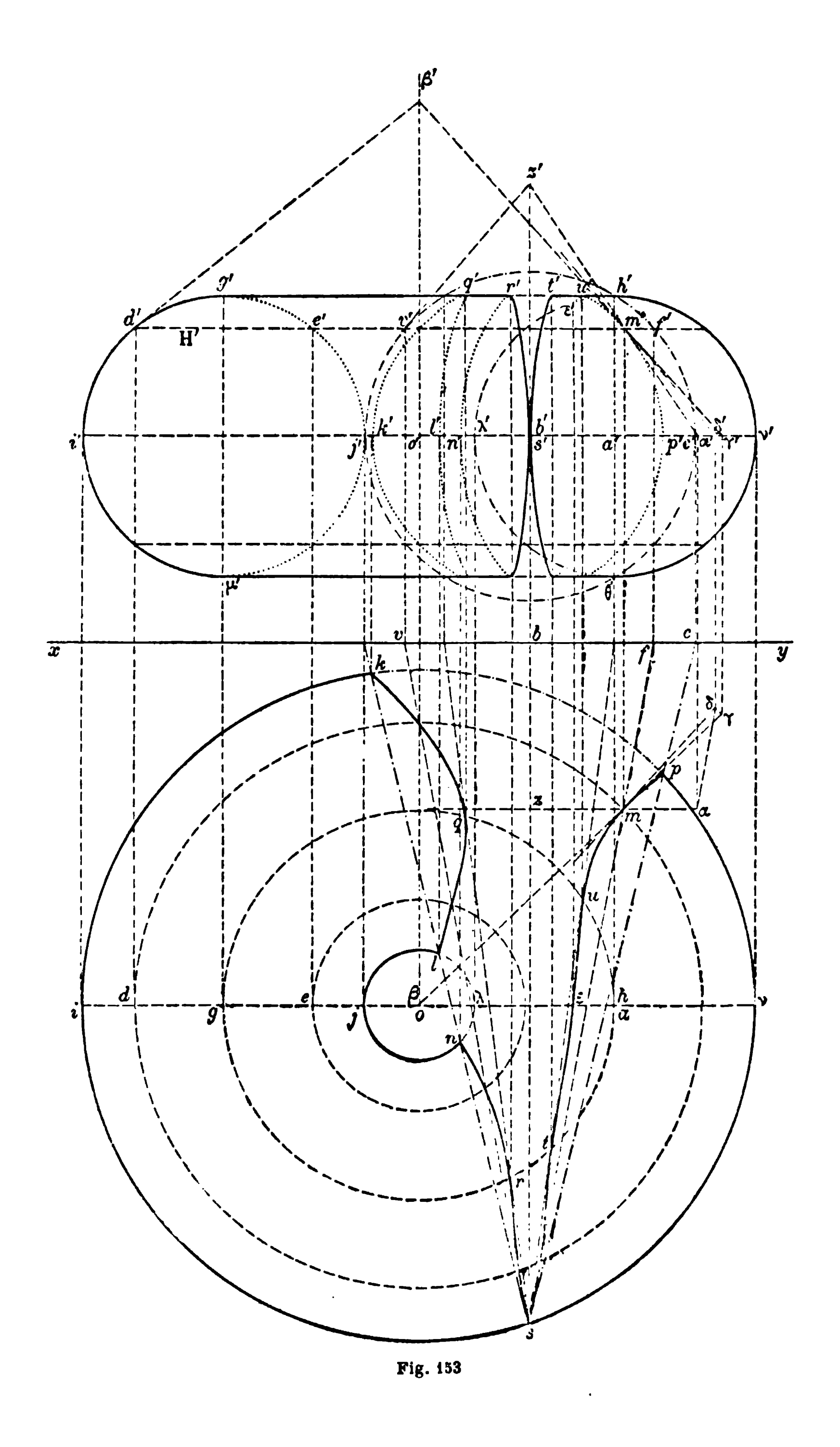


Fig. 153

Les parties de l'intersection qui sont au-dessus du plan du contour apparent horizontal sont vues, celles qui sont au-dessous sont cachées, mais comme leur projection coïncide avec celle des parties situées au-dessus, toute la courbe en projection horizontale doit être représentée vue. La courbe sépare d'ailleurs la partie du tore extérieure au conoïde de celle qui est à l'intérieur de ce solide, elle limite le volume que nous représentons. Quant au conoïde, il est supposé enlevé et ses génératrices de contour apparent sont représentées en trait mixte.

Projection verticale. — La circonférence $(gh, g'h')$ a deux arcs $(rt, r't')$, $(qu, q'u')$ à l'intérieur du conoïde ; mais les parties $q'u'$, $t'r'$, de la droite $q'u'$ sont les projections d'arcs de la circonférence gh situés en avant du contour apparent vertical et extérieurs au conoïde, il ne reste donc que la portion $r't'$ qui doit être enlevée. La circonférence $i'j'$ est tout entière extérieure au conoïde, l'arc $g'j'\mu'$ est caché. La circonférence $a'\lambda'$ pénètre dans le conoïde au point ε' et en son symétrique, donc l'arc $\varepsilon'\lambda'$ et son symétrique sont dans le conoïde et par suite enlevés. L'arc $\varepsilon'h'$ et son symétrique sont cachés. Passons à la courbe d'intersection. L'arc $k'q'l'$ et son symétrique se projettent horizontalement suivant l'arc kql qui est plus voisin de la ligne de terre que le contour apparent vertical, donc ils sont cachés. De même l'arc $n'r'$ compris entre le cercle $(gh, g'h')$ et le cercle $(oj, o'j')$ est caché par la partie extérieure de l'anneau formé par le tore. Pour des raisons analogues les arcs $t'\varepsilon'u'p'$ et leurs symétriques sont cachés. Au contraire les arcs $s'r'$, $s't'$ et leurs symétriques, qui sont sur la partie extérieure de l'anneau et en avant du contour apparent vertical sont vus. La directrice $c'j'$ du conoïde est enlevée.

EXERCICES

1. — Une sphère de rayon $R = 50^{mm}$ est tangente au plan horizontal de cote zéro au point o. D'un point A, situé dans ce plan à une distance $oA = 100^{mm}$, on mène successivement :

1° Les deux tangentes à la sphère faisant avec la verticale un angle de 40° ;

2° Les deux tangentes à la sphère faisant avec l'horizontale oA un angle de 23°.

Ces quatre tangentes étant considérées comme les arêtes d'une pyramide indéfinie de sommet A, tracer la projection du volume commun à la sphère et à cette pyramide.

(*École navale, 1895.*)

2. — Une sphère de centre O, de rayon égal à 9^{cm}, est tangente au plan horizontal. Soit AB un diamètre horizontal de la sphère, C le milieu du rayon OA, D le point le plus élevé de la sphère. Par les trois points B, C, D mener trois parallèles faisant des angles de 45° avec le plan horizontal et perpendiculaires à la direction AB.

Trouver la projection horizontale de l'intersection de la sphère et de la surface prismatique indéfinie ayant ces trois parallèles pour arêtes latérales.

Représenter la portion (supposée opaque) de la sphère comprise dans la surface prismatique. Construire les sommets des ellipses formant la projection de l'intersection et écrire les cotes des points correspondants.

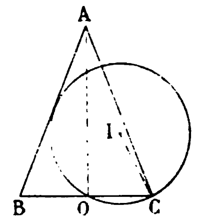
Mener les tangentes à ces ellipses en leurs points situés sur les projections des arêtes.

Construire les projections des points de l'intersection déterminés par le plan horizontal de cote 16.

Mener à l'intersection les tangentes parallèles aux côtés du triangle BCD et écrire les cotes des points de contact.

(*École de Saint-Cyr, 1895.*)

3. — On considère un cône droit à base circulaire dont le rayon de base $OC = 60^{mm}$ et la hauteur $OA = 150^{mm}$. Dans le plan méridien ABC, on trace la circonférence passant par les deux points O, et C, tangente au côté AB, et dont le centre I se trouve, par rapport à BC, du même côté que A.



Tracer, sur le plan de la base du cône et sur le plan méridien ABC, les projections de l'intersection de la surface du cône et de la surface de la sphère de centre I et de rayon IC.

(*École navale, 1896.*)

4. — 1° Construire un tétraèdre TABC dont la base ABC est sur le plan horizontal, connaissant les longueurs des six arêtes : $BC = 200^{mm}$, $CA = 189^{mm}$, $AB = 151^{mm}$, $TA = 113^{mm}$, $TB = 107^{mm}$, $TC = 131^{mm}$ (BC parallèle à xy à la distance de 30^{mm}, B à droite, A plus éloigné que BC de xy).

2° Construire un cône de révolution à axe vertical, dont la trace horizontale, tangente à AB, a pour centre la projection t de T et dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle égal à l'inclinaison de la face BTC sur le plan horizontal.

3° Construire l'intersection de la pyramide et du cône. Tangentes aux points remarquables. Représenter la portion de la pyramide extérieure au cône, portion supposée opaque.

(*École de Saint-Cyr, 1893.*)

5. — Tracer à 18^{cm} du bord inférieur de la feuille une droite sur laquelle

on prendra $sa = 10^{cm}$, $sb = 25^{cm}$, $sh = 27^{cm}$, s étant à 1^{cm} du bord de la feuille à droite du dessinateur; s est la projection horizontale du sommet S d'un cône de révolution; la cote de S égale 14^{cm}; a et b sont les traces horizontales des deux génératrices du cône situées dans le plan projetant horizontalement son axe.

Un triangle isocèle *cad* situé dans le plan horizontal a sa base *cd* égale à 5^{cm}; sa hauteur relative à *cd* est *ah*. Ce triangle *cad* est la base d'un prisme dont les arêtes ont une pente égale à $\frac{10}{27}$, l'arête issue de a coupant Ss entre S et s.

Représenter la projection horizontale de la partie du cône solide et opaque extérieure au prisme et comprise entre le plan horizontal et son sommet.

(*École de Saint-Cyr, 1896.*)

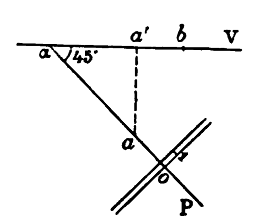
6. — On donne un plan $P\alpha P'$, dont les traces font avec la ligne de terre xy deux angles $P\alpha y$ et $P'\alpha y$ égaux à 45°, sur la trace horizontale un point A dont l'éloignement est 40^{mm} et sur la trace verticale un point B dont la cote est 62^{mm}. La droite AB est le côté d'un carré situé dans le plan $P\alpha P'$, à droite de AB ; ce carré est la base d'un cube situé au-dessus du plan donné.

Construire l'intersection de ce cube avec le cylindre droit ayant pour trace verticale un cercle de 65^{mm} de rayon situé au-dessus de la ligne de terre et tangent à cette ligne au point a', projection verticale du point A.

On représentera la partie du solide cubique comprise dans le cylindre.

(*École de Saint-Cyr, 1889.*)

7. — On donne un plan P et un plan vertical V. L'angle $P\alpha V$ est égal à 45°.



L'intervalle du plan P est égal à 7^{mm}. Dans le plan P on donne un point A de cote zéro ($\alpha a = 49^{mm}$) et un point B ($\alpha b = 53^{mm},5$).

La droite AB est le côté d'un carré situé dans le plan P, à droite de AB. Ce carré est la base d'un cube situé au-dessus du plan donné.

Construire l'intersection de ce cube avec le cylindre droit ayant pour base dans le plan V un cercle de $56^{mm},5$ de rayon tangent à la droite V au point a'.

Représenter la partie solide du cube comprise dans le cylindre.

On donne une sphère O de 2^{cm} de rayon, tangente au plan horizontal.

Circonscrire à cette sphère un tétraèdre régulier SABC ayant sa base AB dans le plan horizontal.

On mène à la sphère un plan tangent P faisant un angle de 63° avec le plan horizontal et perpendiculaire au plan de symétrie du tétraèdre passant par SA. Construire la section du tétraèdre par le plan P.

Construire les sections par le plan P de la sphère et du cône circonscrits au tétraèdre.

On supposera le tétraèdre opaque et la sphère et le cône transparents.

8. — Un cône de révolution a pour base sur le plan horizontal un cercle O de 50^{mm} de rayon, tangent à la ligne de terre, et il a une hauteur de 112^{mm}. On mène : 1° par le milieu A de la génératrice de front (celle de gauche), le plan parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice opposée; 2° la normale au cône en A qui rencontre le plan horizontal en B, les tangentes BC et BD au cercle O et enfin les plans ABC et ABD.

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cône et au tétraèdre que forment le plan horizontal et les trois plans précédents.

(*École de Saint-Cyr, 1890.*)

9. — Un tétraèdre SABC repose par sa base ABC sur le plan horizontal, l'angle trièdre S est trirectangle; les côtés de la base sont :

$$AB = 209^{mm}, \qquad BC = 193^{mm} \qquad \text{et} \qquad AC = 149^{mm}.$$

AB est parallèle à la ligne de terre (A à droite) et à une distance de cette ligne de 22^{mm}.

Construire l'intersection de ce tétraèdre et de la sphère qui passe par le point S et par le milieu des côtés du triangle ABC.

Pour la mise à l'encre, on représentera le solide commun à la sphère et au tétraèdre.

(*École de Saint-Cyr, 1892.*)

10. — Une droite OS de l'espace a pour trace horizontale *o*; la cote de son point S égale 20^{cm}; sa pente est 1; sa projection *os* est parallèle au bord inférieur de la feuille; *o* est à 14^{cm} du bord inférieur et à 9^{cm} du bord de gauche.

Le point S est le sommet d'un cône ayant pour base dans le plan horizontal le cercle de centre *o*, de rayon égal à 8^{cm}.

La projection horizontale *os* de la droite OS coupe la circonférence *o* en deux points *m* et *n*, le point *n* entre *o* et *s*.

Par une droite de l'espace, de pente 2, ayant sa trace horizontale au milieu de *om* et coupant la verticale de *o* au-dessus du plan horizontal, passent deux plans P et P_1 de pente 4. Parallèlement à cette même droite et par les horizontales perpendiculaires à *on* en *o* et en *n*, on mène les deux plans Q et Q_1. Les traces horizontales de ces quatre plans déterminent un trapèze isocèle qui est la base d'un prisme dont les quatre plans forment les faces latérales. Représenter la projection du corps opaque commun à ce cône et à ce prisme.

Mener à la projection horizontale des sections du cône par les plans P

et P_1 les tangentes parallèles aux côtés du trapèze de base du prisme.

Coter à l'encre rouge les points de contact de ces tangentes, et les autres points remarquables.

Inutile de tracer à l'encre les lignes de construction d'un point quelconque de la section.

(*École de Saint-Cyr, 1894.*)

CHAPITRE IX

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES SURFACES TOPOGRAPHIQUES.

---

134. Définitions. — On appelle *surface topographique* la surface d'un terrain ; c'est une surface dont on ne peut donner une définition géométrique.

Une surface topographique est représentée par les projections cotées des sections de la surface par des plans horizontaux équidistants ; ces sections portent le nom de *courbes de niveau* (*fig.* 154). Le plan de comparaison sur lequel elles sont projetées est désigné souvent par le nom de *plan de repère*.

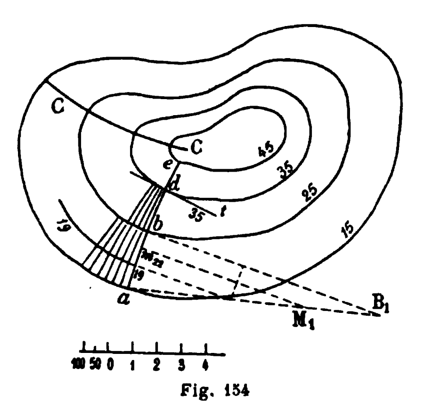


Fig. 154

Au point de vue des opérations qu'on peut avoir à effectuer sur une surface topographique, on suppose les courbes de niveau assez rapprochées pour qu'on puisse admettre, sans erreur sensible, que la normale à une courbe de niveau en un point est aussi normale à la courbe de niveau immédiatement supérieure, et on assimile chaque zone du terrain comprise entre deux courbes de niveau consécutives à une surface gauche engendrée par une portion de droite assujettie à se déplacer en ren-

contrant constamment ces deux courbes et en leur restant normales. On trace *à vue* la portion *ab* de génératrice comprise entre les deux courbes; elle porte le nom de hachure. Étant supposée normale à la courbe de niveau dans l'espace, sa projection est normale à la projection de la courbe de niveau, puisque cette courbe est dans un plan horizontal (18). Le plan coté représentant une surface topographique s'appelle *plan topographique*.

Problème. — *Trouver la cote d'un point d'une surface topographique connaissant la projection m de ce point* (*fig.* 154).

Par le point m nous menons la normale ab à la courbe cotée 15 et nous regardons comme appartenant à la surface la droite qui joint le point a coté 15 au point b coté 25; nous sommes donc ramenés à déterminer la cote d'un point d'une droite (42). Nous prenons bB_1 égal à l'équidistance graphique (43), nous mesurons mM_1 à l'échelle du dessin et nous ajoutons sa valeur à 15 pour avoir la cote demandée.

Pente. — Soient α l'angle de la droite AB de l'espace avec le plan horizontal, e l'équidistance graphique; on a, dans le triangle rectangle abB_1,

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{ab};$$

or $\operatorname{tg} \alpha$ est la pente de la droite AB qu'on suppose sur la surface et ab est la longueur de la hachure. La pente de la surface est donc d'autant plus grande que la hachure est plus petite. En outre, plus la pente est forte, plus on rapproche les hachures et plus on grossit le trait employé.

Courbes intercalaires. — Quand on juge que les courbes de niveau ne sont pas assez rapprochées pour qu'on puisse admettre que la normale à l'une est normale à l'autre, on intercale entre deux courbes de niveau consécutives une courbe dont tous les points aient pour cote une cote donnée comprise entre les cotes des deux courbes de niveau. Supposons qu'on veuille intercaler entre les deux courbes de niveau de cotes 15 et 25 une courbe dont tous les points aient pour cote 19. On trace les normales communes aux deux courbes et sur chacune d'elles on construit la projection du point ayant pour cote 19, puis on joint les points obtenus par une ligne continue.

Figuré du relief. — Pour représenter le relief d'un terrain donné par les courbes de niveau, on fait usage des *lignes de plus grande pente* de la surface. Ce sont des courbes telles que la courbe C qui rencontrent normalement les courbes de niveau consécutives. Quand les lignes de niveau sont suffisamment rapprochées, on les trace aisément, à vue, avec une approximation suffisante. On les multiplie et on épaissit le trait qui les représente dans les parties où la pente est la plus rapide.

Il importe de remarquer que dans la représentation par les hachures on admet l'existence de la normale commune à deux courbes de niveau pour chaque région de la surface comprise entre deux courbes successives, mais, comme ce n'est vrai que d'une manière approchée, les deux hachures qui partent du point b, par exemple, pour aboutir, l'une à la courbe de cote 15 en a, l'autre à la courbe de cote 35 en d, ne sont pas en général rigoureusement dans le prolongement l'une de l'autre.

Lignes d'égale pente. — Supposons qu'on se propose de tracer sur une surface topographique une ligne ayant la même pente dans chaque zone comprise entre deux courbes de niveau consécutives.

Soient a un point par lequel on veut faire passer la ligne, et p la pente donnée (*fig.* 155). L'équidistance dans l'espace est, par exemple, de 10ᵐ. L'équidistance graphique e sera la longueur qui mesure 10ᵐ à l'échelle du dessin. D'après la formule (1),

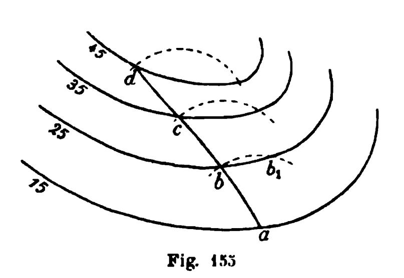


Fig. 155

$$ab = \frac{e}{p}.$$

Du point a comme centre, avec $\frac{e}{p}$ comme rayon, nous décrirons un arc de circonférence qui coupe la courbe de niveau de cote 25 en deux points b et b_1. Choisissons par exemple le point b; nous répèterons l'opération en partant du point b, ce qui nous donnera le point c et ainsi de suite. En joignant par un trait continu les points a, b, c, ..., on obtient une ligne d'égale pente.

Profil d'un terrain. — Si l'on veut se rendre compte d'une manière plus complète de certains détails du terrain, on peut joindre au plan topographique un *profil* obtenu en coupant la surface du terrain par un plan vertical et rabattant la section sur un plan de niveau.

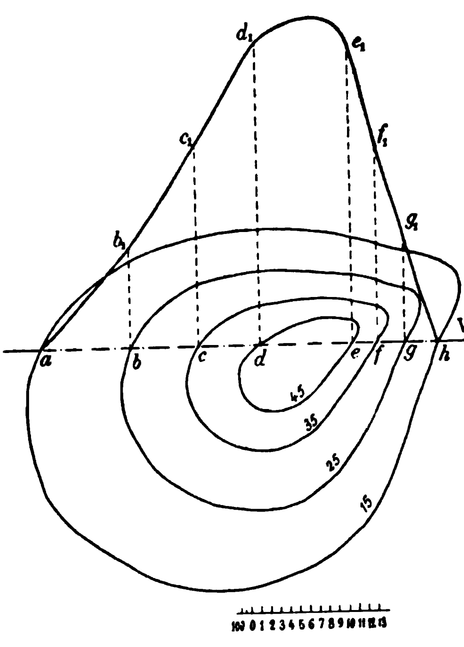


Fig. 156

Par exemple, pour obtenir le profil du terrain obtenu en coupant la surface par le plan vertical V (*fig.* 156) et en rabattant la section sur le plan de niveau de cote 15, on mènera les perpendiculaires à la droite V : bb_1 et gg_1 égales à 25 — 15 ou 10, cc_1 et ff_1 égales à 20 et ainsi de suite. La ligne $ab_1c_1d_1e_1f_1g_1h$ est le profil demandé.

Si l'échelle du plan topographique donnait pour les droites bb_1, cc_1, etc. des longueurs trop petites pour qu'on pût apprécier la forme du profil, on peut construire cette courbe à une échelle amplifiée. C'est ce qui arrive en particulier pour le profil d'une route pris dans la direction de la route, qu'on appelle *profil en long*.

135. Plan tangent en un point de la surface. — Supposons le point donné d sur une courbe de niveau (*fig.* 154). Nous mènerons par le point d la tangente dt à la courbe de niveau et les normales communes db, de, la première aux courbes de cotes 35 et 25, la seconde aux courbes de cotes 35 et 45. Si les deux droites bd, be sont dans le prolongement l'une de l'autre, la droite bde étant considérée comme appartenant à la surface, le plan tangent est déterminé par la droite bde et l'horizontale dt.

Si les deux droites *bd* et *de* diffèrent sensiblement, il y a deux plans tangents au point *d* : *bdt* et *edt*.

Si le point *d* n'est pas sur une courbe de niveau, on construit d'abord la courbe intercalaire passant par le point *d*.

Section plane d'une surface topographique. — On emploie comme plans auxiliaires les plans des courbes de niveau. Soit P le plan donné par son échelle de pente (*fig.* 157). Le plan horizontal de cote 15 coupe le plan suivant l'horizontale de cote 15; cette droite rencontre la courbe de niveau de cote 15 aux points *a* et *b* qui sont des points de la section. On obtient les autres points à l'aide des plans horizontaux de cotes 25, 35, et 45.

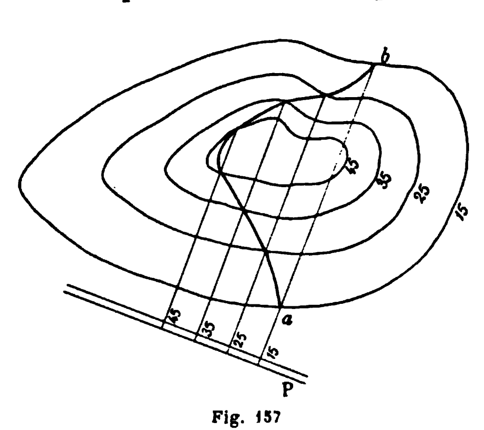


Fig. 157

Intersection d'une droite et d'une surface topographique. — On coupe la surface par un plan auxiliaire passant par la droite, par exemple le plan qui a la droite pour échelle de pente, puis, après avoir construit la section de la surface par le plan, on détermine les points communs à la droite et à cette courbe.

Intersection d'une courbe et d'uue surface topographique. — On considère un cylindre ayant pour directrice la courbe et dont les génératrices sont parallèles à une direction horizontale arbitraire fixe. On détermine la courbe commune au cylindre et à la surface en joignant les points de rencontre des génératrices du cylindre et des courbes de niveau de même cote. Enfin on détermine les points communs à cette courbe et à la courbe donnée.

Intersection de deux surfaces topographiques. — On joint les points d'intersection des courbes de niveau de même cote.

136. Mouvements de terrain. — Lorsque le terrain s'élève au-dessus de la plaine, il forme une colline. Le penchant d'une colline est un coteau qui est formé alternativement de parties convexes et concaves comprenant chacune deux versants. Lorsque les deux versants forment une surface convexe, cette surface est une *croupe*; s'ils forment une surface concave, c'est une *vallée*.

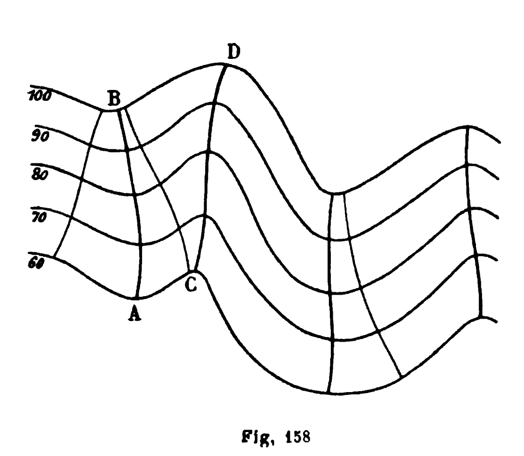


Fig. 158

Une croupe AB (*fig.* 158) est caractérisée par ce fait qu'en montant le long d'une ligne de plus grande pente on rencontre les lignes de niveau suivant des arcs convexes ; dans une vallée CD on les rencontre suivant des arcs concaves.

La ligne de plus grande pente AB qui sépare les deux versants formant une croupe porte le nom de *ligne de faîte* ou *ligne de partage des eaux*. Celle qui sépare les deux versants formant une vallée est appelée *ligne de thalweg* : par exemple, CD.

On ne peut s'écarter perpendiculairement de la première sans descendre, ni de la seconde sans monter. Les lignes de faîte et les lignes de thalweg se succèdent alternativement.

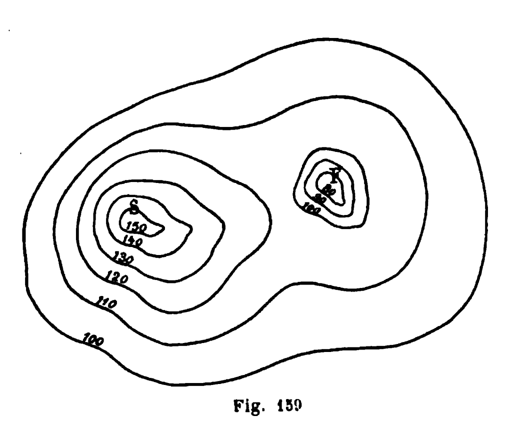


Fig. 159

On appelle *sommet* le point le plus élevé d'une région de surface topographique, et *fond* le point le plus bas. S est un sommet et F un fond (*fig.* 159).

Un *col* est le point le plus élevé de l'intersection de deux surfaces

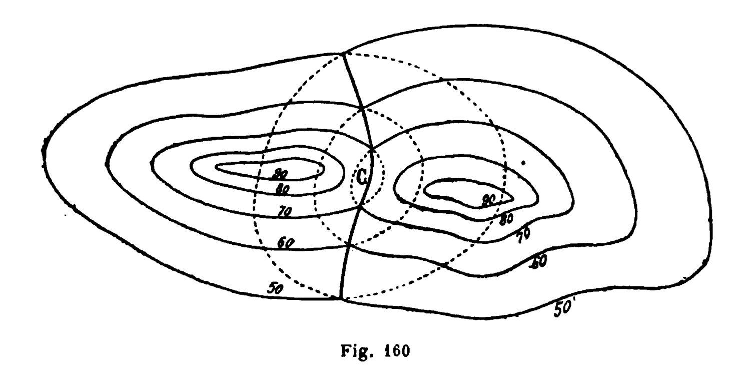


Fig. 160

topographiques convexes. Le point C est un col (*fig.* 160).

CHAPITRE X

REPRÉSENTATION D'UNE SURFACE QUELCONQUE PAR SES INTERSECTIONS AVEC TROIS SÉRIES DE PLANS SÉCANTS PERPENDICULAIRES DEUX A DEUX.

---

137. Imaginons un système de trois plans perpendiculaires deux à deux : le plan horizontal de projection, le plan vertical de projection, auquel nous donnerons le nom de *longitudinal*, et un plan de profil arbitraire que nous appellerons *latitudinal*. Étant donnée une surface quelconque, on suppose qu'on la coupe par trois séries de plans parallèles aux précédents, puis on projette les sections obtenues respectivement sur chacun des trois plans fixes parallèles aux plans de ces sections. Les sections par des plans horizontaux se projettent horizontalement suivant des courbes qui leur sont égales. Il en est de même pour les projections verticales des sections par les plans de front. Pour représenter les projections sur le latitudinal des sections de la surface par les plans de profil, on suppose le latitudinal rabattu sur le plan vertical autour de sa trace verticale ; en opérant ainsi, les projections de ces sections sur le latitudinal sont figurées sur l'épure.

Soient xy la ligne de terre et LL′ le latitudinal (*fig.* 161). Nous appellerons projection d'une courbe sur le latitudinal la position occupée sur l'épure par la projection de cette courbe quand on a rabattu le plan LL′ sur le longitudinal. Supposons une surface représentée par les projections C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 sur le latitudinal des sections de cette surface par les plans de profil P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, le premier étant le latitudinal lui-même. Nous allons montrer comment on peut en déduire les projections verticales des sections de cette surface par

un certain nombre de plans de front F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, et les projections horizontales des sections de la surface par les plans horizontaux H'_1, H'_2, H'_3, H'_4, H'_5, H'_6.

Prenons par exemple le plan de front F_2 ; il coupe les plans de profil suivant des verticales qui se projettent toutes sur le latitudinal suivant la verticale μ qui devient après le rabattement la perpendiculaire $m_1m'_1$ à la ligne de terre. Cette perpendiculaire coupe les différentes courbes C_1, C_2, ... en des points qui se relèvent aux points d'intersection des parallèles à la ligne de terre menées par ces différents points et des plans de profil correspondants. Par exemple, le point m'_1 qui est sur la courbe C_4 se relève dans le plan de profil P_4 au point m'. En joignant les points ainsi obtenus par un trait continu, on obtient la projection D'_2 sur le longitudinal de la section de la surface par le plan de front F_2. On obtient de la même façon les courbes D'_1, D'_3, D'_4, D'_5, correspondant aux plans F_1 (longitudinal), F_3, F_4, F_5.

Considérons maintenant un plan horizontal H'_4. Il coupe les plans de profil suivant des lignes de bout qui se projettent sur le latitudinal suivant la ligne de bout ν'. Cette ligne de bout se rabat suivant la parallèle à la ligne de terre $\nu'n'_1$. Soit n'_1 le point où cette droite coupe la courbe C_4. Ce point se relève au point n. En répétant cette construction pour les différents points d'intersection de la droite $\nu'n'_1$ et des courbes C_1, C_2, ... on obtient la courbe E_4 qui est la projection horizontale de la section de la surface par le plan horizontal H'_4. On construit de même les courbes E_2, E_3, E_5, E_6, correspondant aux autres plans horizontaux. Le plan horizontal de projection H'_1 n'a que le point α commun avec la surface.

138. Problème. — *Connaissant une projection d'un point de la surface, déterminer ce point, et le plan tangent en ce point.*

Supposons le point donné par sa projection horizontale a (*fig.* 161). Considérons le plan de front F qui contient le point cherché. Il coupe les sections horizontales E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 en des points tels que le point (b, b'). En joignant les projections verticales de ces points par un trait continu, on obtient la projection verticale D' de la courbe section de la surface par le plan de front F. Comme *vérification* de la courbe D' on peut rabattre suivant la droite $f_1f'_1$ la projection sur le

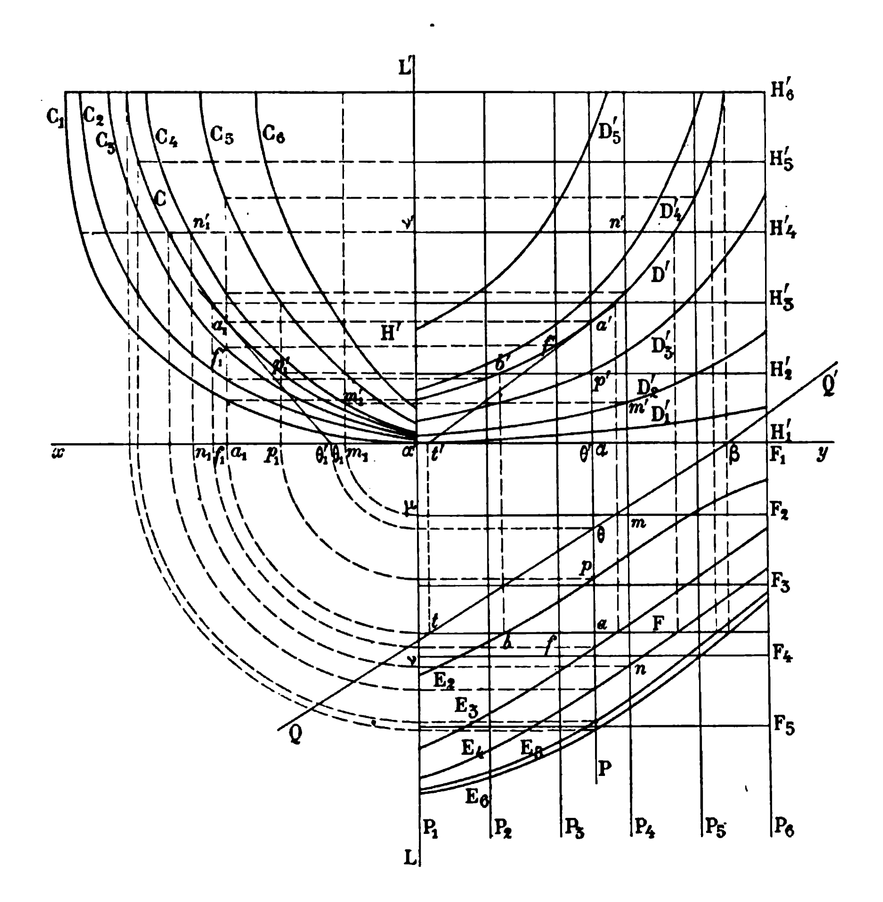


Fig. 161

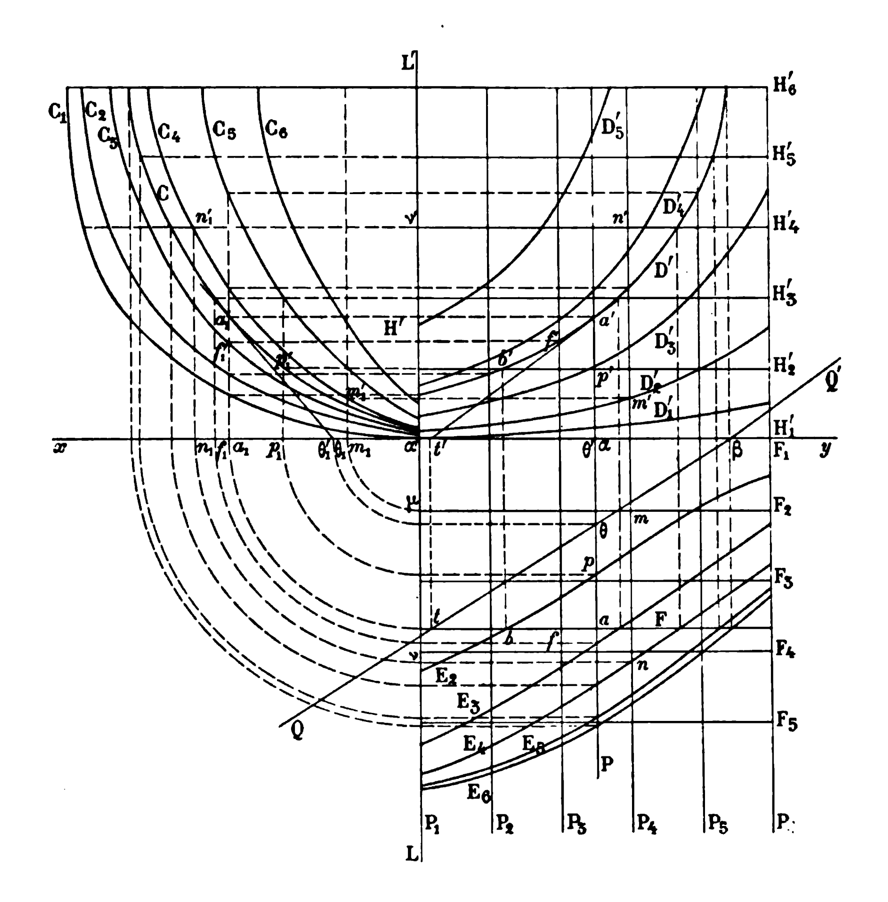


Fig. 161

latitudinal des intersections des plans de profil et du plan de front F. En prenant par exemple le point (f_1, f'_1) qui est sur la courbe C_3, on en déduit le point (f, f') qui est dans le plan de profil P_3. On peut ainsi vérifier les points d'intersection de la courbe D′ et des différents plans de profil. La courbe D′ étant tracée, on mènera la ligne de rappel du point a, et l'on aura au point a' la projection verticale du point cherché.

On peut encore vérifier la cote du point (a, a') en construisant la section de la surface par le plan de profil P passant par le point a. Ce plan coupe les sections horizontales en des points tels que le point (p, p') qui se rabat sur le latitudinal suivant le point (p_1, p'_1). En construisant de même les rabattements des points analogues au point (p, p'), on obtient le rabattement C de la section de la surface par le plan de profil P. Le point (a, a') se rabat au point (a_1, a'_1), et les deux points a' et a'_1 doivent être sur une même parallèle à la ligne de terre.

Proposons-nous de déterminer le plan tangent au point (a, a'). La tangente $(at, a't')$ à la courbe D′ au point (a, a') sera une première droite du plan. La tangente $(a_1\theta_1, a'_1\theta'_1)$ à la courbe C sera le rabattement d'une seconde droite du plan qui se relève suivant la droite $(a\theta, a'\theta')$ dans le plan de profil P. Le plan tangent est déterminé par ces deux droites. La trace horizontale $Q\beta$ de ce plan est la droite $t\theta$. Sa trace verticale $\beta Q'$ est parallèle à la projection verticale $a't'$ d'une frontale du plan. Les deux tangentes $a't'$, $a'_1\theta'_1$ sont naturellement menées *à vue*, puisque les deux courbes D′ et C n'ont pas une définition géométrique. Comme *vérification*, on peut construire la projection horizontale de la section de la surface par le plan horizontal H′ qui passe par le point (a, a'); la tangente au point a à la projection horizontale de cette section doit être parallèle à la droite $Q\beta$, puisque c'est la projection horizontale d'une horizontale du plan tangent. Nous n'avons pas figuré cette dernière construction pour ne pas compliquer l'épure outre mesure.

139. Problème. — *Construire le rabattement sur un plan horizontal de la section de la surface par un plan perpendiculaire au latitudinal.*

Soit $a'Q'_1$ le rabattement sur le plan vertical de la trace du plan sécant sur le latitudinal (*fig.* 162) ; ce plan est parallèle à la ligne de

terre et sa trace verticale est la parallèle $a'Q'$ à la droite xy menée par le point a'. Nous allons rabattre le plan sécant autour de sa trace verticale sur le plan horizontal passant par cette trace. Le point de la section situé dans le plan P_1 est rabattu sur le latitudinal au point d_1; sa distance à la trace verticale $a'Q'$ du plan sécant est donc égale à $a'd'_1$. Le rabattement D_1 de ce point sur le plan horizontal sera sur la

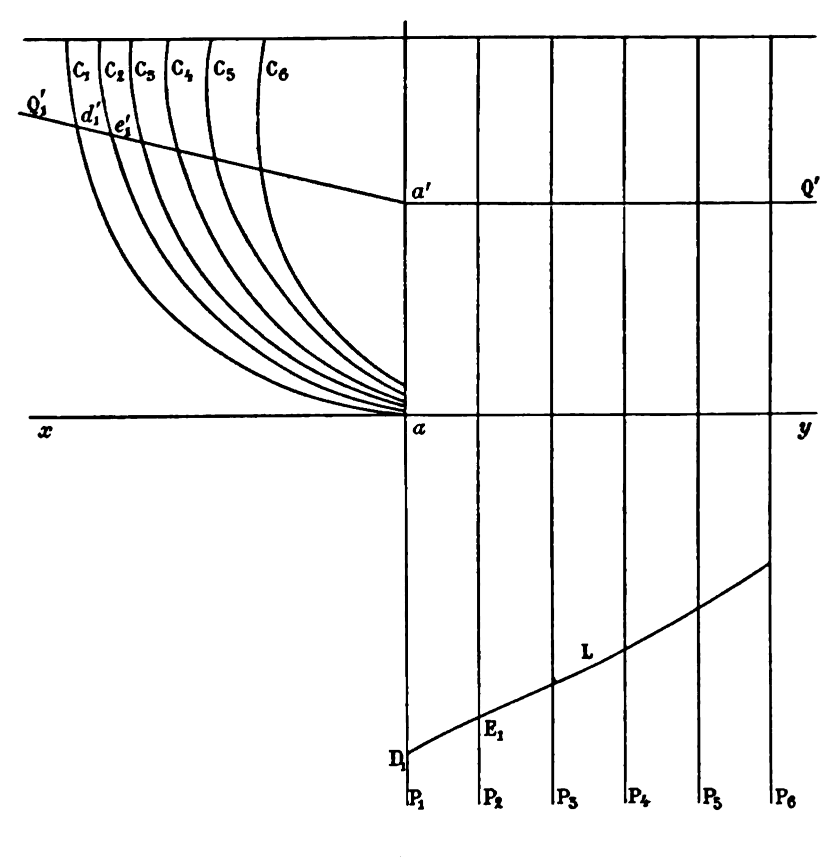


Fig. 162

perpendiculaire à la droite xy menée par le point a à une distance aD_1 de cette ligne de terre égale à $a'd'_1$. De même le point de la section situé dans le plan P_2 se rabat au point E_1 et ainsi de suite. Le rabattement sur le plan horizontal $a'Q'$ de la section de la surface par le plan $a'Q'_1$ perpendiculaire au latitudinal est la courbe L.

140. Problème. — *Construire les projections sur le plan horizontal et sur le longitudinal d'une courbe située sur la surface et donnée par les distances au plan horizontal des points où elle coupe chacune des sections de la surface par les plans* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.

Soient C_1, C_2, C_3, ... les rabattements des sections de la surface par les plans P_1, P_2, P_3, ... (*fig.* 163). Soit h_3 la distance au plan

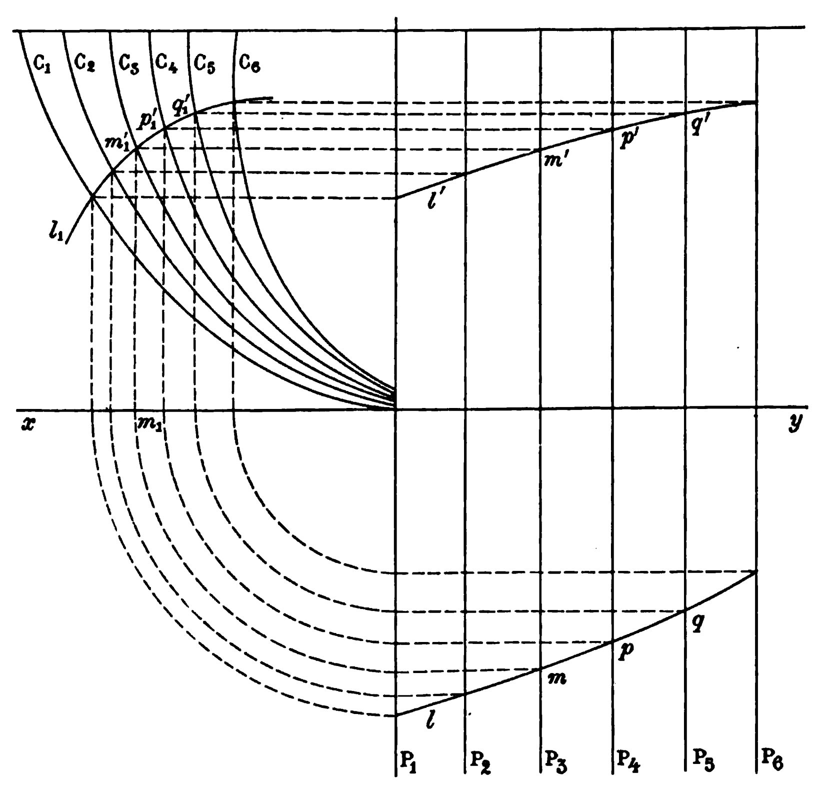


Fig. 163

horizontal du point où la courbe cherchée L coupe la section située dans le plan P_3. Nous prendrons sur la courbe C_3 le point m'_1 à une distance de la ligne de terre égale à h_3. Les projections horizontale et verticale de ce point relevé sont les points m et m'. En opérant de

même pour les autres points, p_1', q_1', ..., on obtient la projection horizontale l et la projection verticale l' de la courbe L. Sa projection sur le latitudinal est la courbe l_1.

Remarque. — Ces divers problèmes trouvent leur application dans les épures relatives à la construction du navire.

COMPLÉMENTS

CHAPITRE I

RÉSOLUTION DES TRIÈDRES

141. Le problème de la résolution des trièdres est le suivant : *étant donnés trois éléments d'un trièdre, construire les autres éléments de ce trièdre.*

Nous désignerons le sommet du trièdre par S et ses trois arêtes par SA, SB, SC.

Nous avons indiqué, dans les exercices proposés à la fin de divers chapitres de ce cours, les méthodes à suivre pour résoudre ce problème dans les différents cas qui peuvent se présenter. Nous allons actuellement traiter un problème fondamental auquel nous ramènerons les cas de résolution des trièdres.

Problème. — *Connaissant une face d'un trièdre et la projection cotée, sur le plan de cette face, de l'arête qui lui est opposée, construire tous les éléments du trièdre.*

Prenons comme plan horizontal de projection le plan de la face donnée *asb* (*fig.* 164). Soit *sc* la projection horizontale de l'arête SC. On connait en outre la cote du point C qui se projette au point *c*.

Le dièdre SA est l'angle avec le plan horizontal du plan SAC déterminé par sa trace horizontale *sa* et par le point C. Pour le construire (49) nous mènerons la perpendiculaire *cα* à la droite *sa*, puis nous porterons une longueur *cc'* égale à la cote du point C sur la

perpendiculaire à la droite $c\alpha$ menée par le point c, et enfin nous tracerons la droite $\alpha c'$. L'angle $c\alpha c'$ est l'angle plan du dièdre SA.

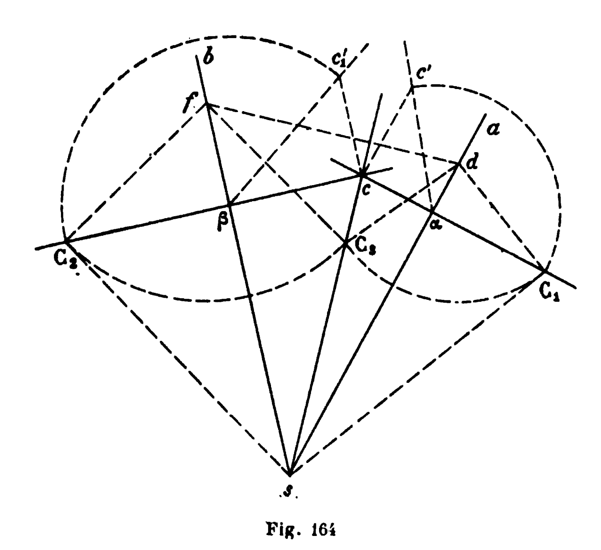


Fig. 164

On construira d'une manière analogue l'angle plan $c\beta c_1'$ du dièdre SB.

Pour déterminer la face ASC, nous rabattrons son plan saC sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale sa (61). Le point C se rabat au point C_1 et l'angle asC_1 est égal à la face ASC.

On obtient de la même façon l'angle bsC_2 égal à la face BSC.

Reste à construire l'angle plan du dièdre SC.

Ce dièdre est l'angle des plans ASC et BSC. Coupons-les par le plan P perpendiculaire à l'arête SC au point C. Autour de la droite sa le point C est rabattu au point C_1 : donc la droite d'intersection des plans P et ASC est rabattue autour de l'horizontale sa suivant la droite C_1d perpendiculaire à la droite sC_1 au point C_1, et le point d où la droite C_1d coupe la droite sa est la trace horizontale de la droite Cd, intersection du plan P et du plan ASC. Autour de l'horizontale sb le point C est rabattu au point C_2 ; donc l'intersection des plans P et BSC est rabattue suivant la droite C_2f perpendiculaire à la droite sC_2 au point C_2 et le point f est la trace horizontale de la droite Cf, intersection du plan P et du plan BSC. La trace hori-

zontale du plan P est par suite la droite *df;* elle est d'ailleurs perpendiculaire à la droite *sc* puisque le plan P est perpendiculaire à la droite SC (27). Rabattons le plan P sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale *df*. Pour obtenir le rabattement du point C, remarquons que les longueurs dC_1 et fC_2 sont égales respectivement aux côtés *d*C et *f*C du triangle C*df* de l'espace.

Nous n'avons donc plus qu'à construire un triangle dfC_3, ayant pour côté la droite *df*, et dont les deux autres côtés ont pour longueurs dC_1 et dC_2. Nous obtenons ainsi le sommet C_3 qui est d'ailleurs sur la droite *sc*, puisque le point C_3 est le rabattement du point C de la droite *s*C et que la droite *sc* est perpendiculaire à la charnière *df*. L'angle plan du dièdre SC est donc l'angle dC_3f, et le problème est résolu.

142. On peut se proposer de résoudre un trièdre connaissant :

1° les trois faces ;

2° deux faces et le dièdre qu'elles comprennent ;

3° deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles ;

4° les trois dièdres ;

5° deux dièdres et la face commune aux deux dièdres ;

6° deux dièdres et la face opposée à l'un deux.

On peut ramener les trois derniers cas respectivement aux trois premiers par la considération du trièdre supplémentaire. Nous allons néanmoins traiter directement chacun des six cas que nous venons d'énumérer.

Nous désignerons les faces du trièdre par *a*, *b*, *c*, et les dièdres opposés par A, B, C.

143. 1er Cas. — *Résoudre un trièdre connaissant les trois faces a, b, c.*

Dans le plan horizontal traçons l'angle *bsc* égal à l'une des faces *a* (*fig.* 165). Supposons le plan de la face ASB rabattu sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale *sb* : l'arête SA sera rabattue suivant la droite sA_1 telle que l'angle bsA_1 soit égal à la face *c*.

Supposons le plan de la face ASC rabattu sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale *sc* : l'arête SA sera rabattue suivant la droite sA_2 telle que l'angle csA_2 soit égal à la face *b*. Proposons-nous de relever un point A de l'arête *s*A. Il se rabattra, dans les deux rabattements précédents, en deux points A_1 et A_2 tels que les longueurs

sA_1 et sA_2 soient égales à une même longueur arbitraire. La projection horizontale a du point A sera le point d'intersection des perpendiculaires menées à sb par le point A_1, à sc par le point A_2 (32). Pour avoir la cote aa' du point A, nous n'avons qu'à relever le point qui se projette horizontalement au point a, et se rabat autour de l'horizontale sb au point A_1 (34). Nous connaissons la face bsc, la projection sa de l'arête opposée sur le plan de cette face et la cote d'un point A de cette arête. Nous sommes ramenés au problème fondamental.

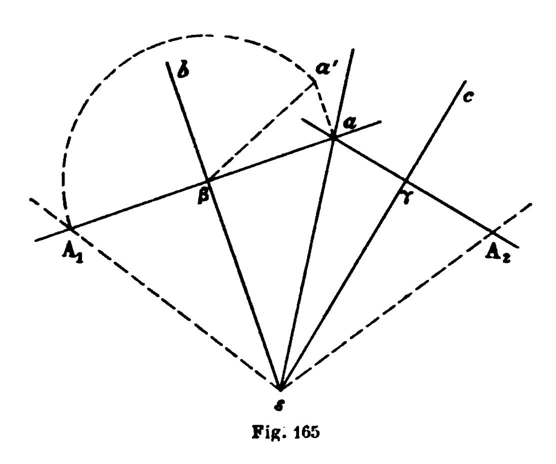


Fig. 165

Comme la cote du point A peut être portée de part et d'autre du plan horizontal bsc, on obtient deux trièdres symétriques répondant à la question. On démontre en géométrie que le problème n'est possible que si chacune des faces données est plus petite que la somme des deux autres, et si la somme des trois faces est plus petite que quatre angles droits, et que ces conditions sont d'ailleurs suffisantes pour que les deux trièdres symétriques existent.

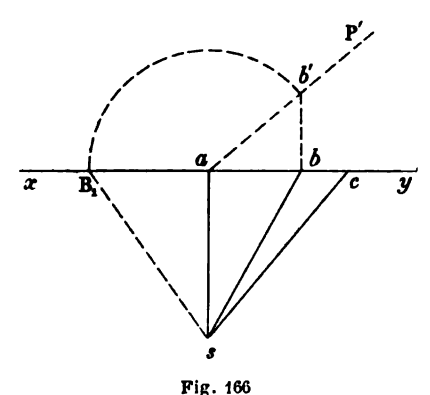


Fig. 166

144. 2e Cas. — *Résoudre un trièdre connaissant deux faces b, c, et le dièdre A compris entre ces deux faces.*

Traçons dans le plan horizontal un angle asc égal à la face b (*fig.* 166). Prenons un plan vertical xy de projection perpendiculaire à l'arête sa. La trace verticale du plan de la face ASB sera une droite aP' faisant avec la droite xy l'angle yaP'

égal à l'angle plan du dièdre A. La face ASB se rabat sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale *sa* suivant l'angle asB_1 égal à la face *c*. Il n'y a plus qu'à relever le point B_1 de l'arête SB qui est située dans le plan *sa*P'. Ce point se relève au point (*b*, *b'*). Nous connaissons alors la face *asc*, la projection *sb* de l'arête SB sur son plan et la cote du point B. Nous sommes ramenés au problème fondamental (141).

Le problème est toujours possible ; deux trièdres symétriques répondent à la question.

145. 3° Cas. — *Résoudre un trièdre connaissant deux faces a, b, et le dièdre A opposé à l'une d'elles.*

Traçons dans le plan horizontal de projection un angle *asc* égal à la face *b* (*fig.* 167). Prenons un plan vertical de projection *xy* perpendiculaire à l'arête *sa*. La trace verticale du plan de la face ASB sera la droite *a*P' faisant avec la droite *xy* un angle *ya*P' égal à l'angle plan du dièdre A. Supposons la face CSB rabattue sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale *sc*. L'arête SB qui est dans le plan ASB sera rabattue suivant la droite sB_1, faisant avec *sc* l'angle csB_1 égal à la face *a*. Proposons-nous de relever le point B de l'arête SB rabattu au point B_1 sur la droite cB_1 perpendiculaire à la droite *sc*. Prenons comme second plan vertical de projection le plan vertical x_1y_1. Le point B_1 se relève en un point dont la projection horizontale est sur la perpendiculaire x_1y_1 à la charnière passant par le point B_1. Le point B qui se projette horizontalement sur la ligne de terre x_1y_1 est donc un point de la trace verticale du plan SAB dans le système x_1y_1. Or cette trace verticale est la droite $\alpha P'_1$ (20). La projection verticale du

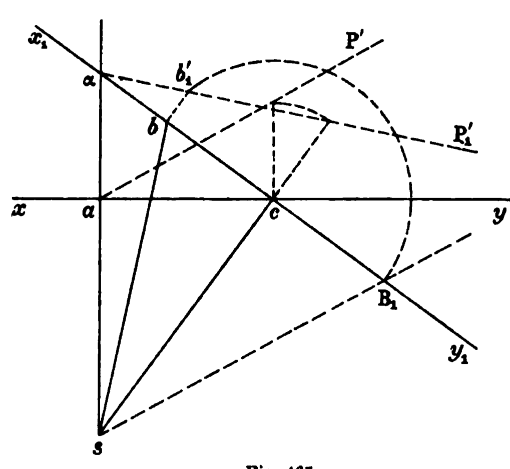


Fig. 167

point B dans le système x_1y_1 est donc à l'intersection de la droite $\alpha P'_1$ et de la circonférence qui a pour centre le point c de la charnière sc et pour rayon la longueur cB_1 (34). Soit b'_1 l'un de ces points d'intersection; on en déduit la projection horizontale b du point B et nous connaissons sa cote bb'_1 (141).

Le problème a deux, une, ou aucune solution suivant que la droite $\alpha P'_1$ coupe la circonférence cB_1, lui est tangente, ou ne la rencontre pas.

A chaque solution correspondent deux trièdres symétriques.

146. 4e Cas. — *Résoudre un trièdre connaissant les trois dièdres.*

Supposons les trois dièdres aigus. Plaçons dans le plan horizontal la face ASB par exemple. Soit sa l'arête SA (*fig.* 168). Remarquons dès maintenant que, lorsque nous aurons obtenu l'arête SB qui sera dans le plan horizontal une droite sb, comme le dièdre SA est aigu, l'arête sc devra se projeter sur le plan horizontal, par rapport à la droite sa, du côté de la droite sb; de même, comme le dièdre SB est aigu, l'arête SC devra se projeter sur le plan horizontal, par rapport à la droite sb, du côté de la droite sa. La projection sc de l'arête SC sur le plan horizontal sera donc à l'intérieur de la face asb du trièdre. Proposons-nous maintenant de construire le trièdre.

Prenons un plan vertical de projection xy perpendiculaire à l'arête sa. Le plan de la face ASC est un plan de bout $P\alpha P'$ dont la trace verticale fait avec la ligne de terre un angle $y\alpha P'$ égal à l'angle plan du dièdre A. Comme le plan de la face ASB est le plan horizontal, il s'agit de construire un plan BSC faisant avec le plan horizontal un angle égal à l'angle plan du dièdre B et avec le plan $P\alpha P'$ un angle égal à l'angle plan du dièdre C (120). Nous pouvons faire passer ce plan par un point quelconque de l'espace. Choisissons un point arbitraire (o, o') du plan vertical. Le plan cherché est tangent aux deux cônes de révolution $o'g'h'$, $o'k'l'$. Soient d' et e' les centres des deux sphères égales inscrites dans les deux cônes. Le centre de similitude des deux sphères rejeté à l'infini nous donne le plan $Q\beta Q'$ et son symétrique par rapport au plan vertical. Prenons le plan $Q\beta Q'$. L'arête sb sera la trace horizontale de ce plan. Le point s est le sommet du trièdre et l'arête SC est l'intersection des deux plans $P\alpha P'$, $Q\beta Q'$ (22). Nous connaissons donc une face asb, la projection sc de l'arête opposée sur le plan de cette face et la cote cc' d'un point C

de cette arête ; d'ailleurs l'arête SC a sa projection *sc* à l'intérieur de la face *asb*. Le trièdre SABC répond à la question. Le plan symétrique du plan QβQ' donne un trièdre symétrique du précédent par rapport au plan vertical *xy*.

Si maintenant on prend le centre de similitude interne *i'* des deux

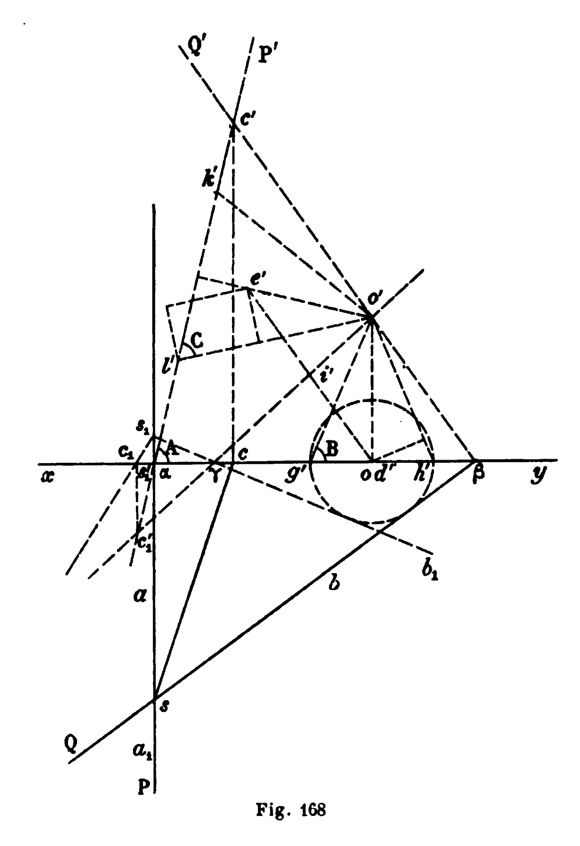


Fig. 168

sphères et qu'on achève la construction comme précédemment, on obtient le trièdre qui aurait pour arêtes les droites s_1a_1, s_1b_1, (s_1c_1, $s'_1c'_1$), et son symétrique ; mais la projection s_1c_1 de l'arête S_1C_1 est à l'extérieur de la face $a_1b_1s_1$: donc ces deux trièdres ne répondent pas à la question.

On peut ramener au cas précédent celui où deux des dièdres donnés B et C sont obtus ; car si on prolonge l'arête SA, suivant la droite SA', au delà du sommet, le trièdre SBCA' a ses trois dièdres aigus.

On peut le construire comme nous venons de l'indiquer car il a pour dièdres le dièdre A et les dièdres supplémentaires des dièdres B et C. En prolongeant l'arête SA′ au delà du sommet on obtient le dièdre demandé.

On traiterait d'une manière analogue le cas où un seul des dièdres A, B, C, est obtus, en prenant pour plan horizontal le plan de la face opposée au dièdre obtus, et on ramènerait à ce cas, en prolongeant une arête, le cas où les trois dièdres sont obtus.

On démontre en géométrie, par la considération du trièdre supplémentaire, que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'avec trois dièdres donnés on puisse construire un trièdre sont que la somme des trois dièdres soit comprise entre deux et six droits, et que chaque dièdre augmenté de deux droits donne une somme plus grande que la somme des deux autres. Il existe alors deux trièdres symétriques ayant pour dièdres les trois dièdres donnés.

147. 5° Cas. — *Résoudre un trièdre connaissant deux dièdres* B *et* C *et la face a commune aux deux dièdres.*

Traçons dans le plan horizontal l'angle bsc égal à la face a (*fig.* 169).

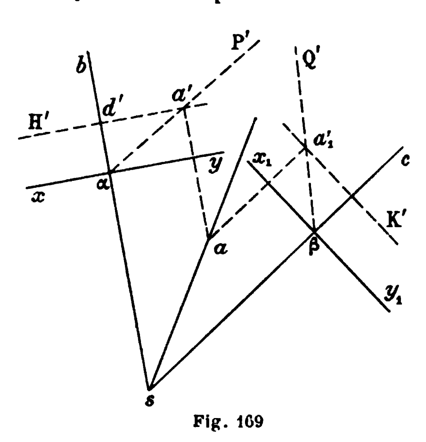


Fig. 169

Représentons le plan de la face ASB à l'aide d'un plan vertical de projection xy perpendiculaire à la droite sb. La trace verticale du plan ASB est la droite $\alpha P'$, l'angle $y\alpha P'$ étant égal à l'angle plan du dièdre B. Représentons le plan de la face ASC à l'aide d'un plan vertical x_1y_1 perpendiculaire à la droite sc. La trace verticale du plan ASC est la droite $\beta Q'$, l'angle $x_1\beta Q'$ étant égal à l'angle plan du dièdre C. Reste à construire la droite SA, intersection des deux plans $s\alpha P'$, $s\beta Q'$, représentés dans deux systèmes différents, mais le plan horizontal étant le même dans les deux systèmes (114). Nous coupons les deux plans par un plan horizontal dont la cote arbitraire est égale à $\alpha d'$. Il coupe le plan $s\alpha P'$ suivant la ligne de bout a', et le plan $s\beta Q'$ suivant la ligne de bout a'_1. Le point a, dont la cote est égale à $\alpha d'$,

est un point de l'arête SA. Nous sommes ramenés au problème fondamental. La construction réussit toujours et donne deux trièdres symétriques répondant à la question.

148. 6e Cas. — *Résoudre un trièdre connaissant deux dièdres* A, B, *et la face a opposée à l'un d'eux.*

Supposons les deux dièdres donnés aigus et prenons le plan horizontal comme plan de la face BSA. Choisissons un plan vertical xy perpendiculaire à l'arête sb (*fig.* 170). Nous pouvons représenter le plan de la face SBC; sa trace verticale est la droite bP', l'angle ybP' étant égal à l'angle plan du dièdre B. Puisque nous connaissons la face a, nous allons construire l'arête SC qui est dans le plan sbP' et qui fait avec la droite sb l'angle a. Supposons le plan sbP' rabattu sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale sb. La droite SC est rabattue suivant la droite sC₁, l'angle bsC₁ étant égal à la face a (le sommet s du trièdre a été choisi arbitrairement sur la droite sb).

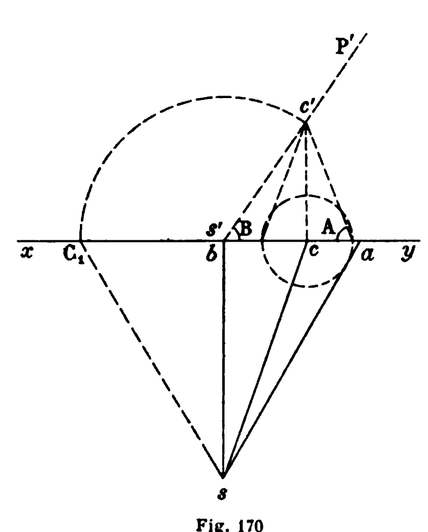


Fig. 170

Le point rabattu au point C_1 se relève au point (c, c') et la projection horizontale de l'arête SC est la droite sc. Reste à construire le plan de la face SAC. Il passe par la droite SC et fait un angle égal à l'angle plan du dièdre A avec le plan horizontal. Il est donc tangent à un cône ayant pour sommet le point (c, c'), pour demi-angle au sommet le complément de l'angle plan du dièdre A, et dont l'axe est vertical (116). Le plan tangent à ce cône passant par la droite SC a sa trace horizontale sa tangente à la circonférence de base du cône et, de plus, elle passe par le point s, trace horizontale de la droite SC. Nous avons donc la face asb du trièdre située dans le plan horizontal, la projection sc de l'arête SC sur cette face, et la cote cc' du point C. Pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse mener par le point s une tangente à la circonférence de base du cône. Il faut en

outre, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, choisir cette tangente de manière que la projection horizontale *sc* de l'arête SC soit à l'intérieur de l'angle *asb* (146). Nous supposons l'angle *a* aigu. Si l'angle A est plus grand que l'angle B, la tangente *sa* répond

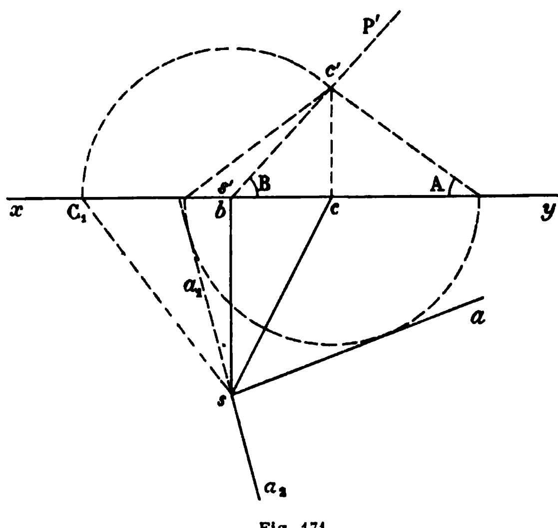


Fig. 171

seule à la question. Si l'angle A est plus petit que l'angle B (*fig.* 171), il y a une seconde solution formée par le prolongement au-delà du point *s* de la tangente sa_1. Le second trièdre a pour arêtes *sb*, sa_2, (*sc*, *s'c'*). On verrait d'une manière analogue, dans le cas où l'angle *a* est obtus, qu'il ne peut y avoir qu'une solution.

On peut ramener au cas précédent le cas où l'un des dièdres est obtus (146). Si c'est le dièdre B, on prolongera l'arête SA au delà du sommet suivant la droite SA'; dans le trièdre SA'BC, le dièdre A' est le même que le dièdre aigu A, et le dièdre A'SBC est supplémentaire du dièdre obtus B. Si c'est le dièdre A qui est obtus, on prolongera l'arête SB'. Enfin, si les deux dièdres A et B sont obtus, on prolongera l'arête SC'.

A chaque trièdre correspond le trièdre symétrique.

CHAPITRE II

DÉVELOPPEMENTS D'UN CYLINDRE ET D'UN CONE

I. — Développement d'un cylindre.

149. Considérons un cylindre que nous supposerons de révolution, ABA'B' (*fig.* 172), dont la circonférence AB est une section droite c'est-à-dire une section par un plan perpendiculaire aux génératrices.

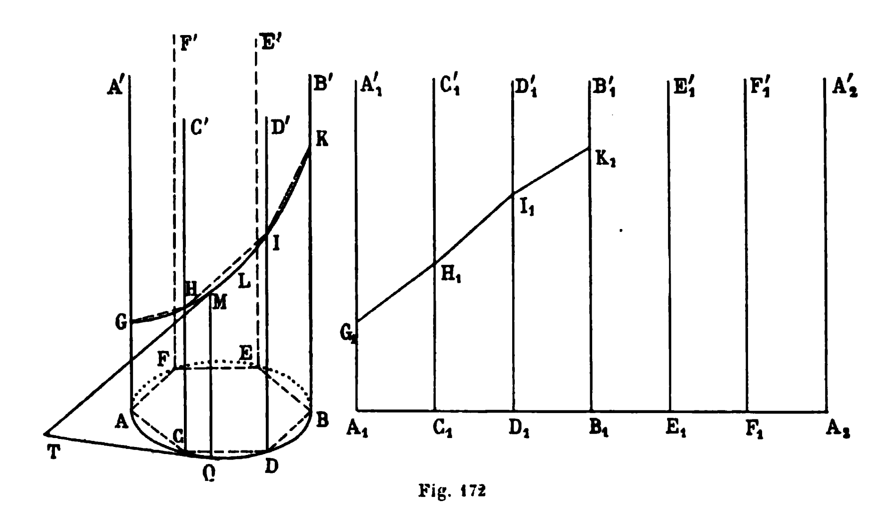


Fig. 172

Dans cette circonférence inscrivons un polygone ACDBEF, que nous pouvons choisir régulier, et, par les sommets de ce polygone, menons des parallèles à la droite AA'; ce seront des génératrices du cylindre. Nous construisons ainsi une surface prismatique inscrite dans le

cylindre. Sur un plan traçons une droite A_1A_2 sur laquelle nous portons les longueurs A_1C_1, C_1D_1, ..., F_1A_2, respectivement égales aux longueurs AC, CD, ..., FA ; puis, par les points A_1, C_1, ..., A_2, menons les perpendiculaires à la droite A_1A_2. Nous dirons que nous avons développé sur un plan la surface prismatique. Soit maintenant une ligne polygonale GHIK tracée sur la surface prismatique. Prenons sur les arêtes de la surface développée les longueurs A_1G_1, C_1H_1, D_1I_1, B_1K_1, respectivement égales aux longueurs AG, CH, DI, BK. La ligne brisée $G_1H_1I_1K_1$ est dite la *transformée* de la ligne polygonale GHIK.

Le trapèze $A_1C_1H_1G_1$ et le trapèze ACHG peuvent être superposés : donc, *la longueur du côté* G_1H_1 *de la transformée est égale à la longueur du côté correspondant* GH *de la ligne polygonale et l'angle* $G_1H_1C_1$ *du côté* G_1H_1 *de la transformée avec l'arête* $C_1C'_1$ *est égal à l'angle* GHC *du côté correspondant de la ligne polygonale avec l'arête* CC'.

Soit L une ligne tracée sur la surface du cylindre. Construisons comme nous l'avons expliqué une surface prismatique inscrite dans le cylindre ; soient G, H, ..., les points où ses arêtes coupent la ligne L. Imaginons qu'on augmente indéfiniment le nombre des côtés du polygone ACDBEF, la longueur de chaque côté tendant vers zéro ; le périmètre de ce polygone a une limite qui est par définition la longueur de la section droite du cylindre. La longueur A_1A_2 tendra par suite vers une longueur égale à celle de la circonférence AB. La ligne brisée $G_1H_1I_1K_1$, dont les côtés tendent vers zéro, aura pour position limite une courbe qui sera la *transformée* de la courbe L.

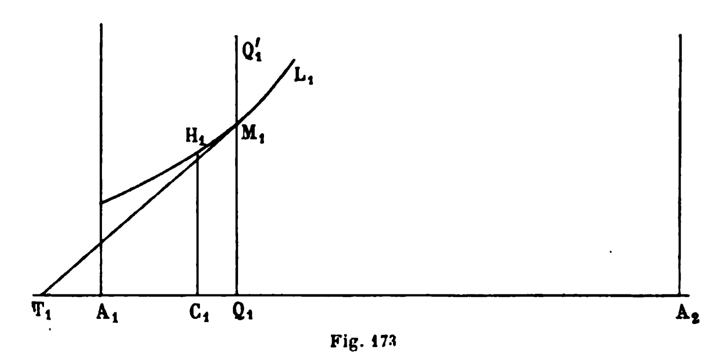


Fig. 173

Détermination d'un point de la transformée. — Soit M un point quelconque de la ligne L. Traçons la génératrice MQ. Supposons que dans le développement la droite A_1A_2 (*fig.* 173) soit la transformée de la

section droite AB. On dit que cette section droite a été *rectifiée* suivant la droite A_1A_2. Si on prend la longueur A_1Q_1 égale à la longueur de l'arc de circonférence AQ sur le cylindre, et si on trace la droite $Q_1Q'_1$ perpendiculaire à la droite A_1A_2, il n'y aura plus qu'à prendre sur cette droite la longueur Q_1M_1 égale à la longueur QM de la génératrice du cylindre, pour avoir le point M_1 correspondant au point M sur la transformée L_1 de la ligne L.

Tangente en un point de la transformée. — Soit MT la tangente à la ligne L au point M. Désignons par T le point où elle coupe la tangente à la section droite au point Q. La longueur QT est dite longueur de la *sous-tangente* au point M. Dans le développement traçons la tangente M_1T_1 à la ligne L_1 au point M_1. La droite MT est la position limite de la sécante MH tournant autour du point M jusqu'à ce que le point H vienne se confondre avec le point M. Si H_1 est le point correspondant au point H dans le développement (*fig.* 173), la droite M_1T_1 est la position limite de la droite M_1H_1, et comme l'angle $H_1M_1Q_1$ est constamment égal à l'angle HMQ, à la limite, les deux angles $T_1M_1Q_1$, TMQ, seront égaux, et les deux triangles rectangles TMQ, $T_1M_1Q_1$, seront égaux. Nous porterons donc sur la droite A_1A_2 la longueur Q_1T_1 égale à la longueur QT de la sous-tangente au point M (*fig.* 172). Cette longueur doit être portée dans un sens tel que le point C_1 occupe par rapport aux points Q_1 et T_1 une position analogue à celle qu'occupe le point C par rapport aux points Q et T. La droite M_1T_1 sera la tangente à la transformée au point M_1.

150. Points d'inflexion de la transformée d'une section plane. — On dit qu'un arc de courbe est *concave* ou *tourne sa concavité* vers un point de son plan lorsque l'arc est du même côté que ce point par rapport à la tangente en l'un quelconque de ses points. Si l'arc et le point sont toujours de part et d'autre de la tangente, on dit que l'arc est convexe vers le point. Un point d'un arc de courbe est dit *point d'inflexion* quand la tangente en ce point y traverse l'arc de courbe.

Nous allons montrer, dans le cas où la courbe L est une section plane du cylindre (*fig.* 174), que si en un point B de cette courbe le plan tangent au cylindre est perpendiculaire au plan sécant, dans le développement, le point correspondant au point B sera un point d'inflexion de la transformée de la courbe L. Soit BT la tangente à la

courbe L au point B ; puisque nous supposons qu'en ce point le plan tangent au cylindre est perpendiculaire au plan sécant P, la droite BT sera la projection sur le plan P de la génératrice BB'. Prenons

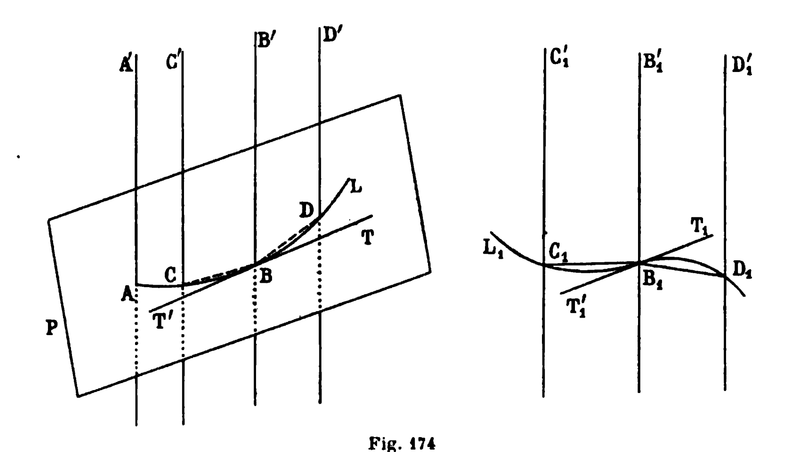


Fig. 174

sur la courbe L, de part et d'autre du point B, deux points C et D aussi voisins que l'on voudra du point B, traçons les droites BC, BD, et les génératrices CC', DD'. Supposons l'angle TBB' aigu. L'angle B'BD est plus grand que l'angle aigu B'BT de la droite BB' avec sa projection, et l'angle B'BC est plus petit que l'angle obtus B'BT' de la même droite avec sa projection. Cela posé, supposons qu'on développe sur un plan les deux faces B'BDD', B'BCC' d'une surface prismatique inscrite dans le cylindre. Soient $T_1T'_1$, B_1C_1, B_1D_1, les droites correspondant aux droites TT', BC, BD. En vertu du principe de la conservation des angles, l'angle $B'_1B_1D_1$ est plus grand que l'angle $B'_1B_1T_1$ et l'angle $B'_1B_1C_1$ est plus petit que l'angle $B'_1B_1T'_1$; comme les points C_1 et D_1 sont aussi rapprochés que l'on veut du point B_1, on voit que les arcs B_1C_1, B_1D_1 de la transformée L_1 de la courbe L sont de part et d'autre de la tangente $T_1T'_1$ à la courbe L_1 au point B_1. Le point B_1 est donc bien un point d'inflexion de la transformée.

151. Application. — *Développement d'une section plane d'un cylindre de révolution.*

On peut toujours par un changement de plan vertical amener

l'axe du cylindre à être parallèle au plan vertical en prenant un nouveau plan vertical parallèle à cet axe ; ensuite on peut rendre l'axe du cylindre vertical en choisissant comme nouveau plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe; enfin, l'introduction d'un nouveau plan vertical perpendiculaire au plan sécant ramènera la question au cas où le plan sécant est un plan de bout. Nous nous placerons dans ce dernier cas.

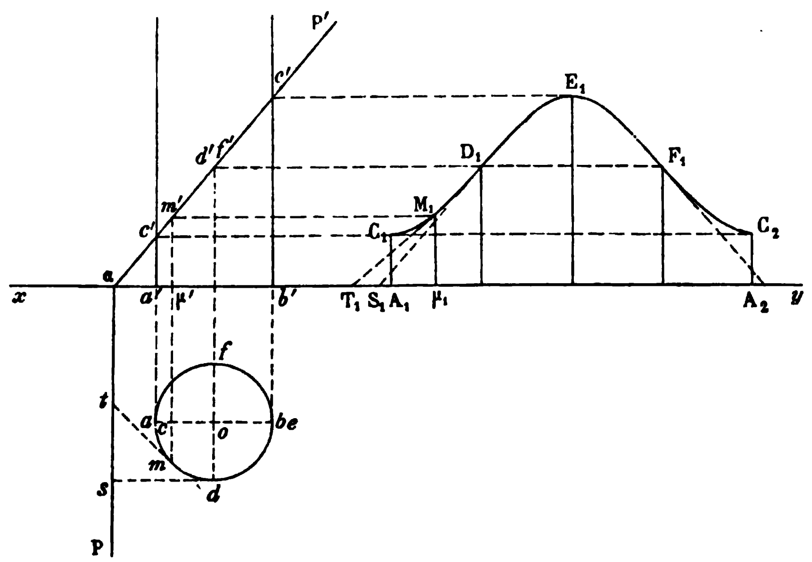


Fig. 175

Soit un cylindre de révolution ayant pour base dans le plan horizontal la circonférence *ab* et dont les génératrices sont verticales, et soit PαP' le plan sécant donné par ses traces (*fig.* 175). Il faut d'abord rectifier la section droite. Pour rectifier un arc de courbe on inscrit dans cet arc une ligne brisée dont chaque côté soit assez petit pour que sa longueur puisse être, sans erreur sensible, confondue avec celle de l'arc qu'il sous-tend. On porte alors sur une droite, l'une à la suite de l'autre, les longueurs de toutes ces cordes consécutives ; on obtient ainsi une longueur très approchée de la longueur de l'arc de courbe rectifié. Dans le cas actuel, la section droite du cylindre étant une circonférence, on peut calculer sa longueur avec telle approximation que l'on veut et la porter sur une droite, la ligne de terre par exemple, suivant la longueur A_1A_2.

Soit (m, m') un point quelconque de la section. Supposons que la génératrice $(a, a')(c, c')$ se transforme, dans le développement, en la génératrice A_1C_1. On prend la longueur $A_1\mu_1$ égale à la longueur de l'arc am en inscrivant une ligne brisée dans l'arc am et portant ses côtés successifs sur la droite A_1A_2 à partir du point A_1. Au point μ_1 on mène la génératrice perpendiculaire à la droite A_1A_2 et l'on prend la longueur μ_1M_1 égale à la longueur $\mu'M'$ qui est la distance du point M au point où la section droite ab est rencontrée par la génératrice passant par ce point. Le point M_1 est le point de la transformée de la section plane qui correspond au point M.

Pour construire la tangente à la transformée au point M_1 nous menons la tangente au point m à la section droite ab, soit t le point où elle coupe la trace horizontale du plan sécant. mt est la longueur de la sous-tangente au point M. Sur la droite A_1A_2 nous prenons la longueur μ_1T_1 égale à la longueur mt ; la droite M_1T_1 est la tangente à la transformée au point M_1.

La tangente à la section au point (c, c') est parallèle à la trace horizontale αP du plan sécant : donc la tangente à la transformée au point C_1 est parallèle à la droite A_1A_2. Il en est de même au point E_1 qui correspond au point (e, e'), et au point C_2. Au point (d, d'), le plan tangent au cylindre est perpendiculaire au plan sécant : donc le point D_1 est point d'inflexion de la transformée. Il en est de même du point F_1 qui correspond au point (f, f'). La transformée de la section plane est la courbe $C_1D_1E_1F_1C_2$. Elle est symétrique par rapport à la perpendiculaire à la droite A_1A_2 menée par le milieu de cette droite.

Remarque. — Comme dans le cas actuel la section droite est une circonférence, pour rectifier l'arc am on peut mesurer au rapporteur l'angle aom et multiplier le nombre de degrés qui le mesure par $\frac{\pi r}{180}$, r étant le nombre qui mesure la longueur du rayon.

II. — Développement d'un cône.

152. Considérons un cône que nous supposerons de révolution, SAB (*fig.* 176), dont la circonférence AB est une section droite. On appelle *section droite* d'un cône l'intersection de ce cône et d'une sphère ayant pour centre le sommet. Quand le cône est de révolution, une section

droite est plane et son plan est perpendiculaire à l'axe. Dans la circonférence AB inscrivons un polygone ACDBEF et traçons les génératrices du cône SC, SD, ... ; nous formons ainsi une pyramide inscrite

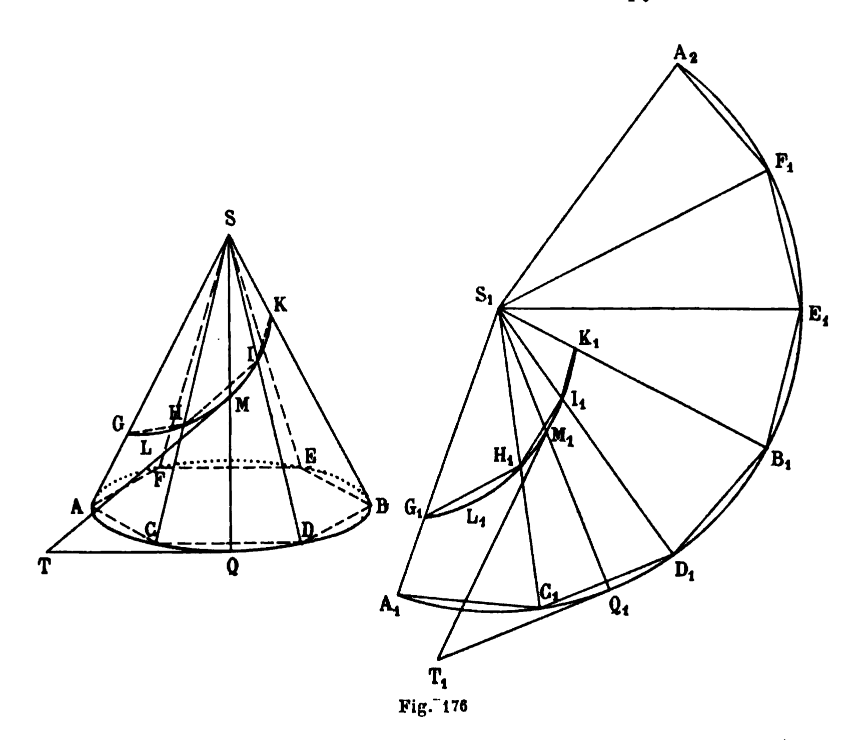


Fig. 176

dans le cône. Sur un plan construisons successivement les triangles $S_1A_1C_1$, $S_1C_1D_1$, ..., $S_1F_1A_2$, égaux respectivement aux triangles SAC, SCD, ..., SFA. On dit que le polygone $S_1A_1C_1 \dots A_2$ est le développement de la surface de la pyramide SAC ... F.

Soit une ligne polygonale GHIK tracée sur la surface de la pyramide ; si nous prenons les longueurs S_1G_1, S_1H_1, S_1I_1, S_1K_1, égales respectivement aux longueurs SG, SH, SI, SK, et si nous traçons les droites G_1H_1, H_1I_1, I_1K_1, la ligne brisée $G_1H_1I_1K_1$ est dite la *transformée* de la ligne polygonale GHIK.

Les triangles tels que SGH, $S_1G_1H_1$, peuvent être superposés ; il en résulte que :

1° *Une ligne polygonale tracée sur la surface de la pyramide et sa transformée ont le même périmètre ;*

2° *Les angles de deux côtés correspondants de la ligne polygonale et de sa transformée avec les génératrices correspondantes sont égaux.*

Soit maintenant L une ligne tracée sur la surface du cône. Imaginons qu'on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la ligne polygonale GHIK, la longueur de chaque côté tendant vers zéro : le nombre des côtés de la ligne brisée $G_1H_1I_1K_1$ augmentera indéfiniment et son périmètre tendra vers un arc de courbe L_1 ; cette courbe L_1 est dite la *transformée*, dans le développement, de la courbe L.

La tangente en chaque point d'une section droite du cône est perpendiculaire à la génératrice correspondante ; donc en chaque point de la transformée d'une section droite la tangente est perpendiculaire à la génératrice correspondante ; comme les points de la transformée sont d'ailleurs tous à la même distance du point S_1 par lequel passent toutes ces génératrices, on voit que la transformée d'une section droite est une circonférence ayant pour centre le point S_1.

Détermination d'un point de la transformée. — Développons d'abord une section droite AB du cône. Dans ce but, inscrivons dans la circonférence AB un polygone ACDBEF que nous pouvons choisir régulier. Pour avoir la longueur de l'arc AC nous inscrirons dans cet arc une ligne brisée d'un nombre de côtés assez grand pour que la longueur de chaque côté puisse être confondue, sans erreur sensible, avec la longueur de l'arc qu'il sous-tend. Nous porterons la longueur de l'arc ainsi obtenue sur une circonférence A_1A_2, décrite sur le plan du développement, du point arbitraire S_1 comme centre avec la longueur SA comme rayon : soit A_1C_1 l'arc ainsi obtenu. Nous porterons cet arc sur la circonférence A_1A_2 un nombre de fois égal au nombre des côtés du polygone ABCDEF ; nous obtiendrons ainsi l'arc de circonférence A_1A_2 qui est la transformée de la circonférence AB. Comme vérification on pourra calculer l'angle $A_1S_1A_2$ car on a

$$\frac{\widehat{A_1S_1A_2}}{360^\circ} = \frac{\text{arc } A_1A_2}{2\pi R_1} = \frac{2\pi R}{2\pi R_1} = \frac{R}{R_1},$$

en appelant R le rayon de la circonférence AB et R_1 celui de la circonférence A_1A_2.

Soit M un point quelconque de la courbe L. Traçons la génératrice SM qui coupe la section droite au point Q. On déterminera le point Q_1, qui correspond au point Q sur la transformée, à l'aide d'une

ligne polygonale inscrite dans l'arc CQ ; puis, sur la génératrice S_1Q_1 on prendra la longueur S_1M_1 égale à la longueur SM : le point M_1 sera le point correspondant au point M.

Tangente en un point de la transformée. — Proposons-nous de construire la tangente à la transformée au point M_1. Soit T le point où la tangente à la courbe L au point M coupe la tangente à la section droite au point Q, et soit T_1 le point où la tangente au point M_1 à la transformée de la courbe L coupe la tangente au point Q_1 à la transformée de la section droite. Les deux triangles TQM, $T_1Q_1M_1$ sont rectangles aux points Q et Q_1, les côtés MQ, M_1Q_1 sont égaux, et les tangentes MT, M_1T_1, qui sont les positions limites des cordes MH, M_1H_1, font avec la génératrice SQ du cône et la génératrice S_1Q_1 du développement des angles égaux : les deux triangles TMQ, $T_1M_1Q_1$ sont donc égaux et le côté Q_1T_1 est égal au côté QT. Par suite, on portera sur la tangente au point Q_1 à la transformée de la section droite, et dans le sens convenable, une longueur Q_1T_1 égale à la longueur QT ; la droite M_1T_1 sera la tangente au point M à la transformée de la courbe L.

153. Points d'inflexion d'une section plane. — Si en un point A d'une section plane L d'un cône S (*fig.* 177) le plan tangent au cône

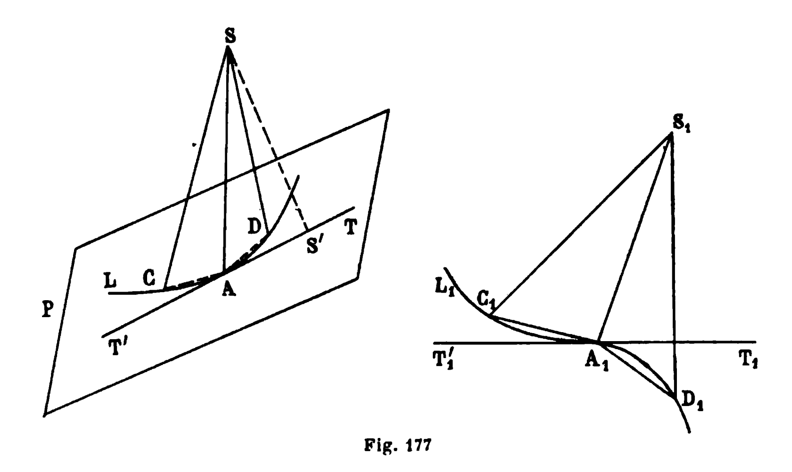


Fig. 177

est perpendiculaire au plan P de la section, le point A_1 de la transformée L_1 de la courbe L, correspondant au point A, est un point

d'inflexion de cette transformée. Soit S′ la projection du point S sur le plan P ; puisque le plan tangent au cône au point A, plan qui passe par la droite TT′, tangente à la courbe L au point A, est perpendiculaire au plan P, le point S′, projection du point S sur le plan P, est sur la droite TT′, qui est par suite la projection de la droite SA sur le plan P. Il n'y a plus ensuite qu'à répéter le raisonnement qui a été fait dans le cas du cylindre (151).

Il pourrait arriver qu'au point A le plan sécant fût perpendiculaire

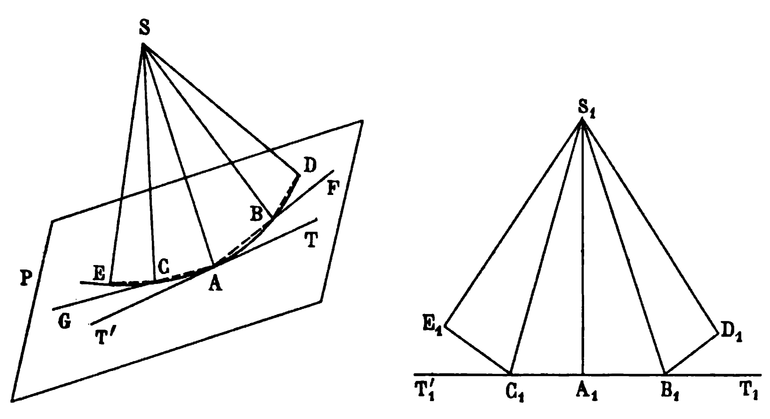


Fig. 178

à la génératrice SA (*fig.* 178) ; examinons ce qui se passera dans le développement. Prenons de part et d'autre du point A, et dans le voisinage de ce point, les points B et C puis les points D et E. Traçons les droites AB, AC, BD, CE, la droite TT′ étant toujours la tangente à la courbe L au point A. Dans le développement de la surface SECABD, les cordes A_1B_1 et A_1C_1 correspondant aux cordes AB et AC viendront coïncider avec la tangente $T_1T'_1$ correspondant à la tangente TT′, puisque les angles SAB, SAC sont droits, ainsi que les angles SAT, SAT′ ; mais l'angle SBD est plus petit que l'angle obtus SBF de la droite SB avec sa projection sur le plan P. De même l'angle SCE est plus petit que l'angle SCG ; donc dans le développement les cordes B_1D_1, C_1E_1 seront du même côté de la tangente $T_1T'_1$ sur laquelle sont venues s'appliquer les droites ABF, ACG. Si maintenant on suppose que les points B et C se rapprochent du point A jusqu'à venir se confondre avec lui, les points B_1, C_1 viendront se

confondre avec le point A_1, et, comme les points D_1 et E_1 seront aussi voisins que l'on voudra du point A_1, on voit que de part et d'autre du point A_1, les deux arcs de la transformée de la courbe L seront du même côté de la tangente $T_1T'_1$.

Nous n'avons pas examiné ce cas pour le cylindre parce que si le plan P est perpendiculaire à une génératrice c'est le plan d'une section droite qui se développe suivant une ligne droite.

154. Application. — *Développement d'une section plane d'un cône de révolution.*

Soit un cône de révolution dont l'axe est vertical ayant pour sommet le point (s, s') et pour base le cercle ab situé dans le plan horizontal (*fig.* 179). Supposons que la surface du cône soit ouverte suivant la génératrice $(sa, s'a')$ et développée sur un plan. Nous imaginerons que le cône soit limité d'une part à sa base, de l'autre au plan horizontal $c'd'$ qui coupe sa surface suivant la circonférence qui a pour projection horizontale la circonférence cd. Dans le développement (*fig.* 180), la circonférence ab se transforme en l'arc de cercle $A_1B_1A_2$ dont le rayon S_1A_1 est égal à la longueur $s'a'$ de l'arête du cône et dont la longueur est égale à celle de la circonférence ab ; la circonférence cd se transforme en l'arc de cercle $D_1C_1D_2$ ayant même centre que le précédent et dont la longueur est égale à celle de la circonférence cd ; son rayon est égal à la longueur de l'arête $s'd'$. Nous allons construire la transformée d'une section hyperbolique du cône dont le plan est le plan $P\alpha P'$. Nous commençons par construire la projection horizontale $efgh$ de la section limitée à la base et au cercle CD, et les asymptotes de cette section (127). Le sommet (t, t') de l'hyperbole devient dans le développement le point T_1, situé sur la génératrice S_1A_1 à une distance S_1T_1 du point S_1 égale à la distance $t's'$ du point (t, t') au sommet du cône. On le retrouve au point T_2 sur la génératrice S_1A_2. On peut d'ailleurs remarquer que le développement de la surface du cône est symétrique par rapport à la génératrice $B_1S_1C_1$ transformée de la génératrice $b's'c'$. L'arc te se développe suivant un arc T_1E_1, l'arc de cercle A_1E_1 ayant même longueur que l'arc de cercle ae. Au point h correspondra le point H_1, l'arc de cercle D_2H_1 ayant même longueur que l'arc dh. Le point (z, z') est sur la génératrice $(sc, s'c')$; nous obtenons le point correspondant Z_1 en prenant sur la génératrice S_1C_1 la longueur S_1Z_1 égale à la longueur $s'z'$. L'arc hz se transforme en

l'arc H_1Z_1. Le reste de la transformée sera symétrique par rapport à la droite B_1C_1 de la partie déjà obtenue.

La tangente au point (t, t') à l'hyperbole est perpendiculaire à la génératrice $(sa, s'a')$, donc la tangente à la transformée au point Γ_1 est perpendiculaire à la génératrice S_1A_1 à cause de la conservation des angles (152). De même la tangente au point Z_1 est perpendiculaire

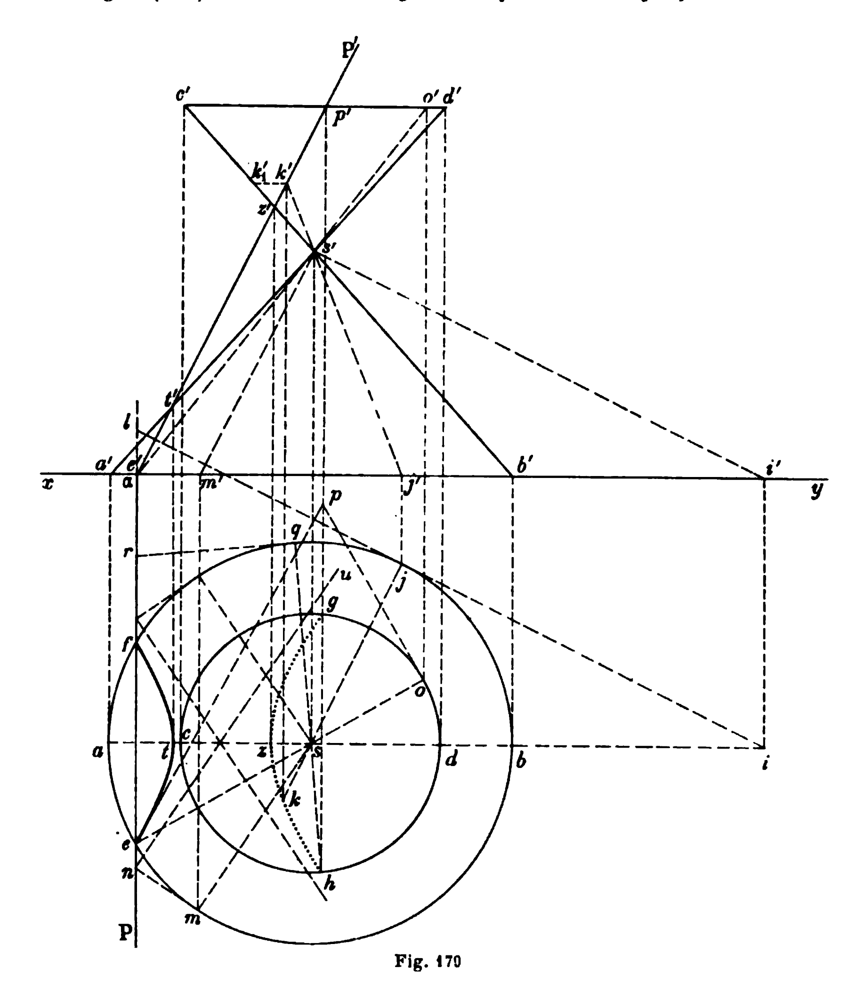


Fig. 170

à la génératrice S_1C_1. Pour construire la tangente à la transformée au point E_1 nous construisons d'abord la tangente *pe* à l'hyperbole au point *e*. Cette tangente est l'intersection du plan $P\alpha P'$ et du plan tan-

gent au cône suivant la génératrice (*eso*, *e's'o'*) ; ce dernier plan contient la tangente (*op*, *o'p'*) à la circonférence CD, et cette droite coupe le plan PαP' au point (*p*, *p'*). La transformée de la génératrice *eso* est la génératrice $E_1S_1O_1$. Sur la tangente au cercle C_1D_1 au point O_1 nous portons la longueur O_1P_1 égale à la longueur *op* du côté du point C_1 par rapport au point O_1 ; la tangente à la transformée au point E_1 est la droite P_1E_1.

Pour transformer l'asymptote *nu* nous déterminons d'abord la

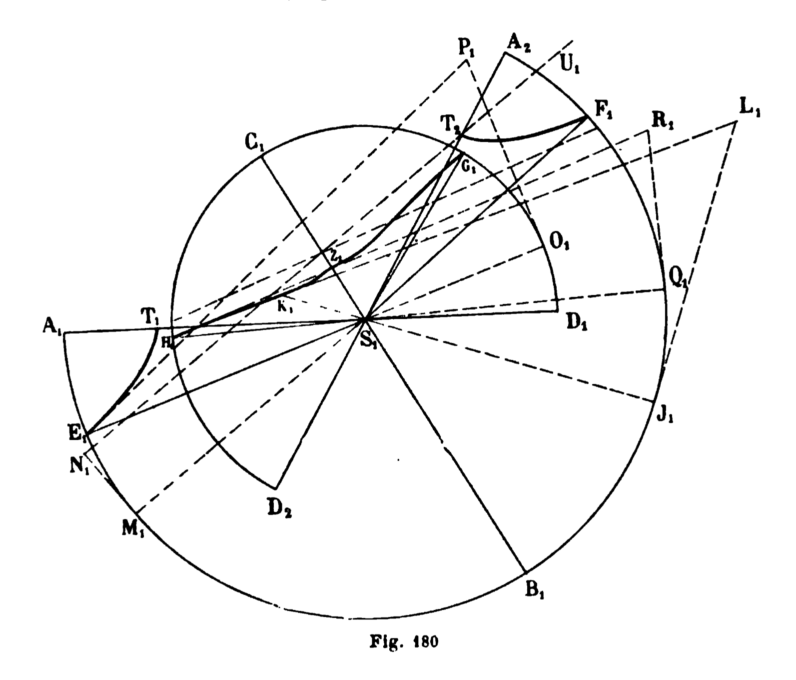


Fig. 180

génératrice S_1M_1 transformée de la génératrice *sm* parallèle à l'asymptote ; il suffit pour cela de prendre l'arc de cercle A_1M_1 de longueur égale à celle de l'arc de cercle *am*. Sur la tangente au point M_1 à l'arc de cercle A_1A_2 nous prenons du côté du point A_1 la longueur M_1N_1 égale à la longueur *mn*, puis, par le point N_1 nous menons la droite N_1U_1 parallèle à la droite S_1M_1 ; c'est l'une des asymptotes. L'autre asymptote est symétrique de la précédente par rapport à la droite B_1C_1. Pour obtenir les points d'inflexion nous construisons d'abord les plans tangents au cône parallèles à une perpendiculaire au plan sécant, c'est-à-dire perpendiculaires eux-mêmes au plan sécant (153). Nous traçons

la droite $(si,\ s'i')$ perpendiculaire au plan $P\alpha P'$ et par sa trace horizontale i nous menons la tangente ij à la base du cône ; nous choisissons l'une des solutions qui sont symétriques par rapport au plan de front passant par l'axe. La génératrice de contact est la génératrice $(sj,\ s'j')$ qui contient le point $(k,\ k')$ de l'hyperbole. Ce point se transforme en un point K_1 qui est point d'inflexion de la transformée. Nous construisons le point K_1 comme tout point de la transformée, en déterminant d'abord la génératrice S_1J_1 transformée de la génératrice $(sj,\ s'j')$, puis en prenant la longueur S_1K_1 égale à la distance des deux points $(s,\ s')$ $(k,\ k')$, distance qui est égale à la longueur $s'k'_1$, car $k'k'_1$ est la projection verticale du parallèle du cône passant par le point $(k,\ k')$ et les portions de génératrices comprises entre le sommet et ce parallèle sont toutes égales à la longueur $s'k'_1$. La tangente d'inflexion est d'ailleurs la droite L_1K_1, la longueur J_1L_1 étant égale à la longueur jl.

Enfin nous déterminons la tangente R_1H_1 à la transformée au point H_1 à l'aide de la génératrice $H_1S_1Q_1$, transformée de la génératrice hsq, et de la longueur Q_1R_1 égale à la longueur qr.

Remarque. — Les méthodes que nous venons d'exposer peuvent s'appliquer au développement d'un cylindre ou d'un cône qui ne serait pas un cylindre ou un cône de révolution.

CHAPITRE III

INTERSECTION DE CONES ET DE CYLINDRES

I. — Intersection de deux cônes.

155. En exposant le procédé général pour obtenir l'intersection de deux surfaces, nous avons dit que si l'une des surfaces est composée de droites on peut chercher à déterminer les points d'intersection de ces droites avec l'autre surface. Nous allons entrer dans quelques détails sur l'application de cette méthode à la recherche des intersections de cônes et de cylindres. Nous examinerons d'abord le cas où les deux surfaces données sont des cônes.

Supposons que les directrices des deux cônes soient des courbes planes C et C_1 situées dans les plans P et Q (*fig.* 181). Soient S le sommet du cône qui a pour directrice la courbe C, S_1 celui du cône qui a pour directrice la courbe C_1, AB la droite d'intersection des deux plans P et Q. Pour trouver les points communs à une génératrice du cône S et au cône S_1, il faut faire passer un plan auxiliaire par cette génératrice et par le point S_1 ; ce plan contiendra la droite SS_1 qui passe par les sommets des deux cônes. Nous emploierons donc comme plans auxiliaires *des plans passant par la droite qui contient les sommets des deux cônes.*

Soient Σ le point où la droite SS_1 coupe le plan P, Σ_1 celui où elle coupe le plan Q.

Détermination d'un point de l'intersection. — Un plan auxiliaire est déterminé par la droite SS_1 et par un point arbitraire G de la droite AB. Il coupe le plan P suivant la droite $G\Sigma$ qui rencontre la directrice C aux points H et K. Les génératrices SH, SK du cône S sont les génératrices de ce cône situées dans le plan auxiliaire SS_1G. On obtient d'une manière analogue les génératrices S_1H_1, S_1K_1 du

cône S_1 situées dans le plan SS_1G. Ces quatre génératrices se coupent deux à deux en quatre points M, N, P, Q, qui font partie de la courbe

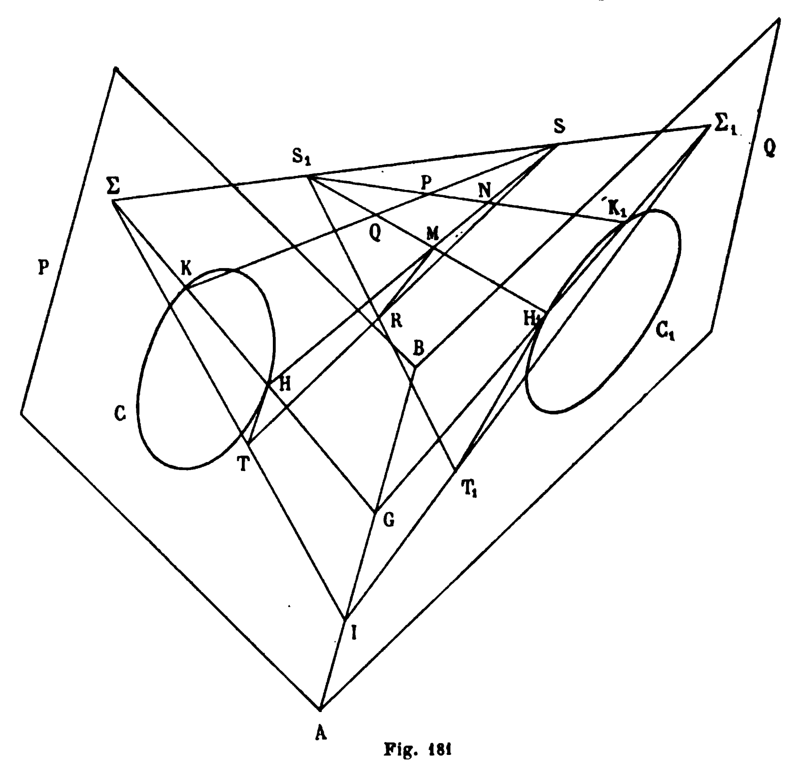


Fig. 181

d'intersection des deux cônes. En faisant varier la position du point G sur la droite AB on obtiendra autant de points que l'on voudra de l'intersection.

Tangente en un point. — La tangente à la courbe d'intersection en l'un de ses points est l'intersection des plans tangents à chacun des deux cônes en ce point (95). Proposons-nous par exemple de construire la tangente à l'intersection des deux cônes au point M. Le plan tangent au cône S au point M est le plan SHT déterminé par la génératrice SMH et par la tangente HT à la directrice au point H où elle est rencontrée par cette génératrice. Le plan tangent au cône S_1 est le plan $S_1H_1T_1$. Le point M est un premier point de la droite d'intersection de ces deux plans ; pour en avoir un second nous les

coupons par l'un des plans auxiliaires autres que le plan SS_1G, par exemple le plan SS_1I. La droite ΣI coupe la tangente HT au point T et la droite ST est dans le plan tangent SHT ; la droite $\Sigma_1 I$ coupe la tangente H_1T_1 au point T_1 et la droite S_1T_1 est dans le plan tangent $S_1H_1T_1$. Les deux droites ST, S_1T_1, qui sont d'ailleurs dans le même plan SS_1I se coupent en un point R qui est dans lès deux plans tangents. La droite RM est la tangente à la courbe d'intersection au point M.

Plans auxiliaires limites. — Prenons comme plan auxiliaire le plan déterminé par la droite SS_1 et par la tangente ΣH à la directrice C du cône S passant par le point Σ, et supposons que ce plan coupe le

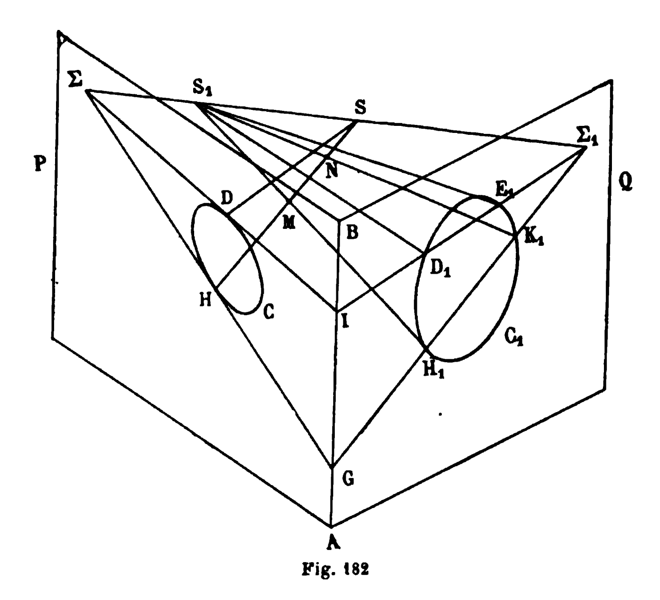


Fig. 182

cône S_1 suivant les génératrices S_1H_1, S_1K_1 (*fig.* 182). Les tangentes à la courbe d'intersection des deux cônes aux points M et N donnés par le plan auxiliaire considéré sont les génératrices S_1H_1, S_1K_1 du cône S_1. En effet, si nous considérons le point M par exemple, le plan tangent au cône S suivant la génératrice SM est le plan $S\Sigma H$ et ce plan contient la génératrice S_1H_1 du cône S_1 ; comme le plan tangent au cône S_1 suivant cette génératrice passe par cette droite S_1H_1, elle

est l'intersection des plans tangents aux deux cônes ; c'est donc la tangente à la courbe d'intersection au point M.

Les plans auxiliaires SΣH, SΣD, sont dits *plans limites*. C'est entre leurs traces sur les plans P et Q que sont comprises les traces des plans auxiliaires utiles. Nous venons de montrer que : *lorsqu'un plan auxiliaire est limite pour l'un des cônes, ses génératrices d'intersection avec l'autre cône sont tangentes, aux points correspondants, à la courbe d'intersection des deux cônes.*

Supposons les plans limites tangents au même cône (*fig.* 182) : les points d'intersection des génératrices du cône S et des génératrices du cône S_1 correspondant à l'arc D_1H_1 de la directrice forment une première courbe, tandis que les points d'intersection des génératrices du cône S et des génératrices du cône S_1 correspondant à l'arc E_1K_1 de la directrice forment une seconde courbe distincte de la première. On dit qu'il y a *pénétration* du cône S dans le cône S_1.

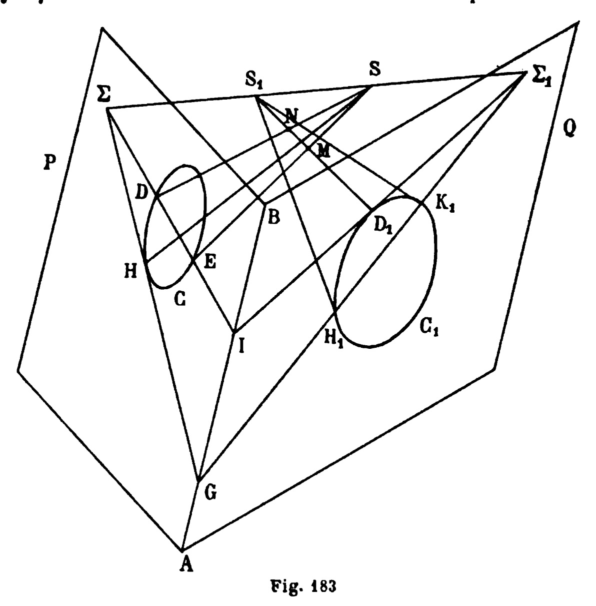


Fig. 183

Supposons au contraire que le plan limite SΣH soit tangent au cône S et que le plan limite $S_1\Sigma_1D_1$ soit tangent au cône S_1 (*fig.* 183). Les génératrices du cône S correspondant à l'arc DHE de la directrice, coupent les génératrices du cône S_1 correspondant aux arcs D_1H_1 et D_1K_1 de la directrice, suivant deux arcs de courbes qui se relient aux

précédents aux points M et N situés sur la génératrice S_1D_1. L'intersection se compose donc d'une seule courbe qu'on peut décrire d'un mouvement continu. On dit que c'est un *arrachement*.

156. Nous allons exposer sur l'exemple suivant l'application de la théorie précédente.

Un cône de révolution a pour sommet le point (s, s') *et pour base dans le plan horizontal la circonférence de centre* s *dont le rayon est égal à* sa (*fig.* 184). *Un second cône de révolution a pour sommet le point* (s_1, s'_1) *et pour base, dans le plan vertical, la circonférence de centre* s'_1 *dont le rayon a pour longueur* s'_1b'. *Construire les projections de la courbe d'intersection de ces deux cônes.*

La droite d'intersection des plans des directrices des deux cônes est la ligne de terre xy. Construisons la droite $(ss_1, s's'_1)$ qui passe par les sommets des deux cônes ; elle coupe le plan horizontal au point (σ, σ') et le plan vertical au point (σ_1, σ'_1), ce sont les points d'intersection de la droite passant par les sommets et des plans des directrices des deux cônes. Les traces des plans auxiliaires sur le plan horizontal passent par le point σ, sur le plan vertical par le point σ'_1 ; sur le plan horizontal, elles sont comprises entre la droite σg tangente à la circonférence sa, et σh, le point h étant le point où la ligne de terre est coupée par la tangente $\sigma'_1 h$ à la circonférence s'_1b'. Comme les deux tangentes qui déterminent les plans limites sont tangentes l'une au cône S, l'autre au cône S_1, le cas qui nous occupe est un arrachement.

Plans limites. — Le plan $\sigma g \sigma'_1$ coupe le cône S suivant la génératrice SC et le cône S_1 suivant les génératrices S_1C_1, S_1D_1, qui coupent la précédente aux points (m, m'), (n, n') de l'intersection ; en ces points la courbe est tangente aux génératrices correspondantes du cône S_1 (155).

Le plan limite $\sigma h \sigma'_1$ nous donne les points (o, o'), (p, p'), où la courbe est tangente aux génératrices correspondantes du cône S.

Points sur les contours apparents. — Il faut toujours déterminer les points sur les contours apparents. Dans l'épure actuelle, l'intersection présente des points sur la génératrice SA de contour apparent vertical du cône S, et sur la génératrice S_1B de contour apparent

horizontal du cône S_1. Pour la première nous employons le plan auxiliaire $\sigma i \sigma_1'$: il nous donne les points (q, q'), (r, r'). En ces points la projection verticale de la courbe est tangente à la droite $s'a'$ (86); les tangentes à la projection horizontale de la courbe ne présentent point de particularité. Pour la génératrice S_1B nous choisissons le plan auxiliaire $\sigma j \sigma_1'$; il nous donne les points (t, t'), (u, u'), où la projection horizontale de la courbe est tangente à la droite s_1b.

Point quelconque. — Faisons choix d'un plan auxiliaire quelconque $\sigma k \sigma_1'$; il coupe le cône S suivant les deux génératrices SE, SF, et le cône S_1 suivant les deux génératrices S_1E_1, S_1F_1 ; nous obtenons ainsi quatre points de l'intersection. La tangente en l'un de ces points (v', v') est l'intersection du plan tangent au cône S suivant la génératrice SE et du plan tangent au cône S_1 suivant la génératrice S_1E_1. Pour en déterminer un point autre que le point (v, v') nous coupons les deux plans tangents par le plan auxiliaire $\sigma i \sigma_1'$. Il coupe au point (z, z') la trace horizontale ez du plan tangent au cône S et comme il passe par le point S il coupe ce plan tangent suivant la droite $(sz, s'z')$. Il coupe au point (α, α') la trace verticale $e_1'\alpha'$ du plan tangent au cône S_1 qu'il coupe suivant la droite $(s_1\alpha, s_1'\alpha')$. Les deux droites $(sz, s'z')$, $(s_1\alpha, s_1'\alpha')$ se coupent au point (β, β') et la tangente au point (v, v') est la droite $(v\beta, v'\beta')$.

Tracé de la courbe. — Il s'agit maintenant de joindre les points de l'intersection dans l'ordre convenable par un trait continu.

Partons du plan auxiliaire limite $\sigma g \sigma_1'$: la génératrice SC du cône S et la génératrice S_1C_1 du cône S_1 sont dans ce plan auxiliaire, elles se coupent au point M que nous prendrons comme point de départ et auquel nous attribuerons le numéro 1.

Passons au plan auxiliaire suivant $\sigma i \sigma_1'$; supposons qu'un mobile se déplace le long de la directrice du cône S dans le sens ca et qu'en même temps un autre mobile décrive la directrice du cône S_1 dans le sens $c_1'e_1'$: en suivant les mouvements de ces mobiles nous rencontrons dans le cône S la génératrice SA et dans le cône S_1 une génératrice qui coupe la précédente au point Q que nous numérotons 2.

Le plan auxiliaire $\sigma k \sigma_1'$ nous donne les génératrices SE, S_1E_1, qui se coupent au point V numéroté 3.

Le plan auxiliaire $\sigma j \sigma_1'$ nous donne deux génératrices qui se coupent au point numéroté 4.

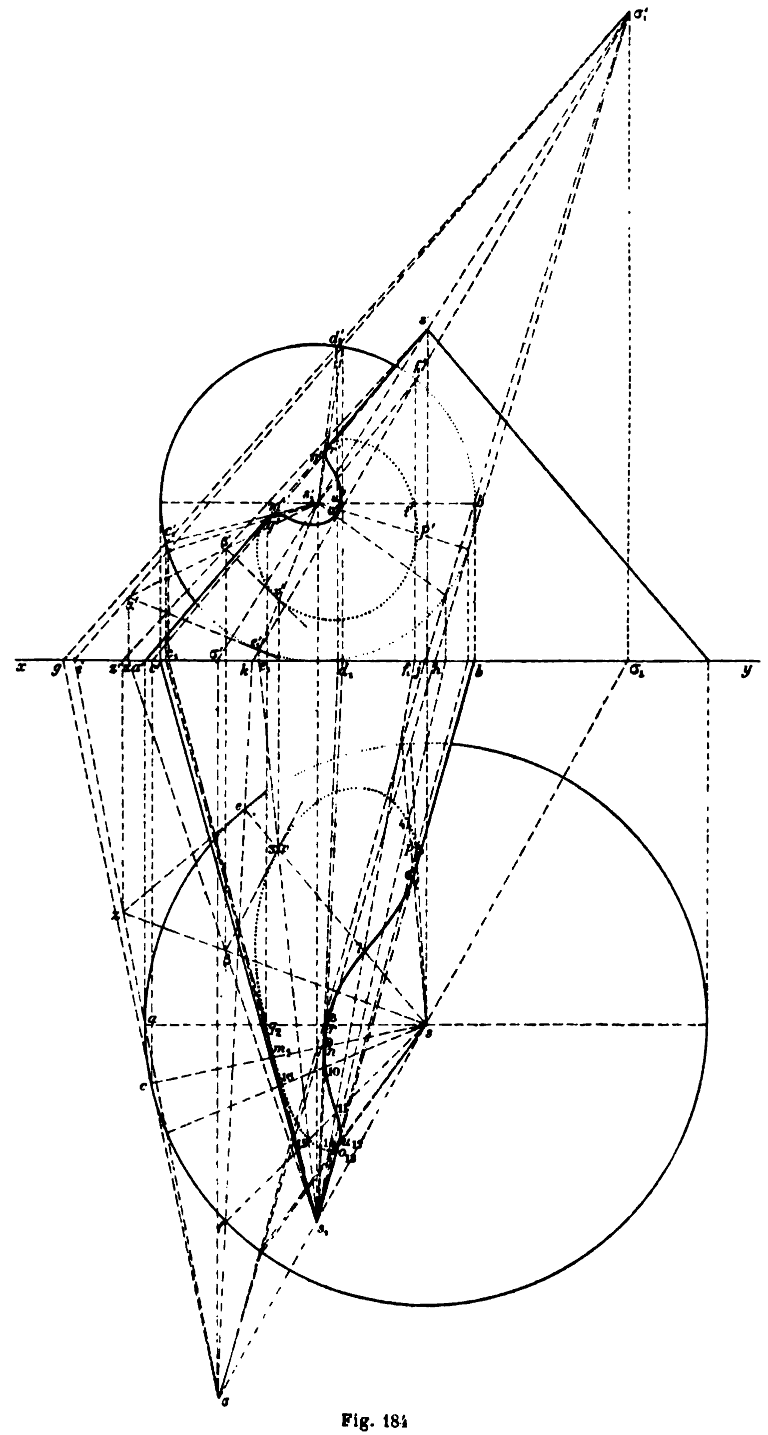


Fig. 184

Nous arrivons enfin au plan limite $\sigma h\sigma'_1$ auquel correspondent deux génératrices se coupant au point P numéroté 5.

Nous revenons alors au plan auxiliaire $\sigma j\sigma'_1$ et nous faisons rétrograder le mobile du cône S pendant que celui du cône S_1 continue à décrire dans le même sens la directrice de ce cône. Nous obtenons sur la génératrice S_1B le point T que nous numérotons 6.

Ensuite le plan auxiliaire $\sigma k\sigma'_1$ nous donne deux génératrices se coupant au point numéroté 7.

Le plan $\sigma i\sigma'_1$ nous donne le point R numéroté 8.

Le plan $\sigma g\sigma'_1$ nous donne sur les génératrices SC et S_1D_1 le point N numéroté 9.

Nous revenons au plan auxiliaire $\sigma i\sigma'_1$, le mobile du cône S continuant sa marche dans le même sens pendant que celui du cône S_1 rétrograde à partir du point d'_1. Nous obtenons le point 10.

Le plan auxiliaire $\sigma k\sigma'_1$ nous donne le point 11 sur les génératrices SF, S_1F_1.

Le plan $\sigma j\sigma'_1$ donne le point U numéroté 12 sur le contour apparent du cône S_1.

Le plan limite $\sigma h\sigma'_1$ donne le point O numéroté 13.

Nous revenons au plan auxiliaire $\sigma j\sigma'_1$, le mobile du cône S rétrogradant tandis que celui du cône S_1 continue sa marche au delà du point de contact de la droite $\sigma'_1 h$ avec la circonférence s'_1. Nous obtenons le point 14.

Le plan auxiliaire $\sigma k\sigma'_1$ nous donne ensuite le point 15 sur les génératrices SF, S_1E_1.

Le plan $\sigma i\sigma'_1$ nous donne le point 16.

Le plan $\sigma g\sigma'_1$ nous ramène enfin au point de départ M.

Il n'y a plus qu'à joindre les points dans l'ordre où ils sont numérotés.

Les projections verticales des points de l'intersection sont obtenues à l'aide des lignes de rappel menées par leurs projections horizontales et des génératrices correspondantes du cône S_1. Par exemple, la projection verticale v' du point v est à l'intersection de la ligne de rappel de ce point et de la projection verticale $s'_1e'_1$ de la génératrice S_1E_1 du cône S_1 sur laquelle est le point V. La tangente à la projection verticale de l'intersection au point v' est la droite $\beta'v'$. Nous n'avons pas figuré les autres lignes de rappel pour ne pas charger l'épure outre mesure.

Remarque. — Dans le cas où il y a pénétration, on applique la méthode que nous venons d'exposer successivement aux deux courbes distinctes qui composent l'intersection.

Ponctuation. — Proposons-nous de représenter *le système des deux cônes supposés pleins et de même substance*, limités : le cône S au plan horizontal, le cône S_1 au plan vertical.

Projection horizontale. — La portion *ut* du contour apparent du cône S_1 est à l'intérieur du cône S, elle disparait dans l'ensemble des deux solides et doit être représentée en trait mixte. Les portions s_1u, tb de la génératrice s_1b et l'autre génératrice de contour apparent du cône S_1 sont extérieures au cône S, elles doivent être représentées en trait plein. Le cône S est représenté par sa base qui est extérieure au cône S_1.

Elle est vue sauf dans la région pointillée qui est au-dessous du cône S_1. Quant à l'intersection, l'arc *tru* qui est au-dessus du contour apparent du cône S_1 est vu ; l'arc *tpqou* est caché par le cône S_1.

Projection verticale. — La portion $q'r'$ de la génératrice $s'a'$ de contour apparent du cône S est à l'intérieur du cône S_1, elle doit être représentée en trait mixte. Le contour apparent du cône S, sauf la portion $q'r'$, est vu. La base du cône S_1 est extérieure au cône S, elle doit être représentée en trait plein sauf dans la région pointillée qui est cachée par le cône S. L'arc $q'u'r'$ de la courbe d'intersection est en avant du contour apparent du cône S, il est vu ; l'arc $q'v't'r'$ est caché par le cône S.

157. **Point double de l'intersection.** — S'il existe un plan tangent commun aux deux cônes, l'intersection présente un *point double*, c'est-à-dire un point par lequel passent deux branches de courbe. On peut s'en rendre compte de la manière suivante.

Soient P et P_1 les plans des directrices C et C_1 des deux cônes S et S_1 (*fig.* 185). S'il existe un plan tangent à la fois aux deux cônes, il passe par les points S et S_1, c'est-à-dire par la droite $\Sigma\Sigma_1$; d'ailleurs il coupe les plans P et P_1 suivant des tangentes ΣD, $\Sigma_1 D_1$ aux directrices et ces tangentes passent par le point G d'intersection de la droite AB et du plan tangent commun. Si nous prenons ce plan comme plan

auxiliaire, nous obtenons le point M qui sera point double de l'intersection. En effet, coupons les deux cônes par le plan auxiliaire $\Sigma I \Sigma_1$ voisin du précédent. Il coupe le cône S suivant les deux génératrices SE, SF, et le cône S_1 suivant les deux génératrices S_1E_1, S_1F_1. Les

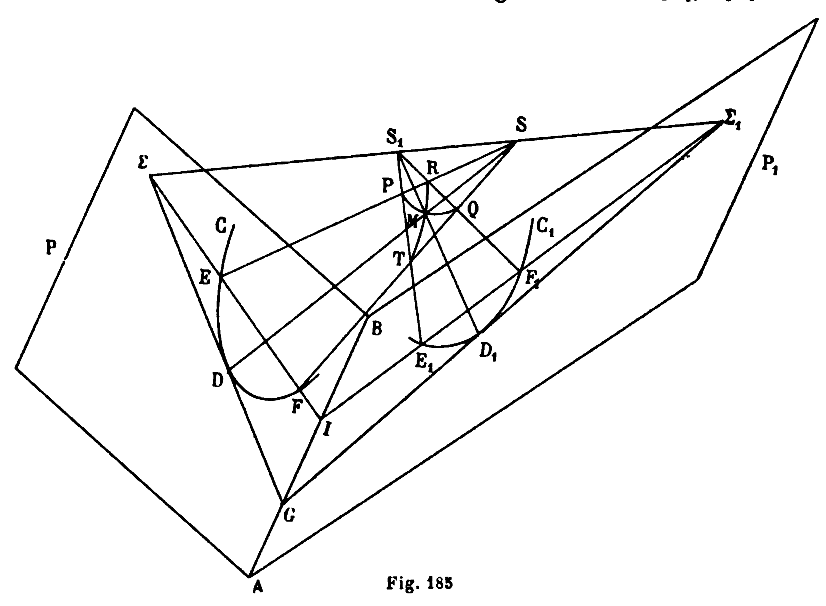


Fig. 185

génératrices SE, S_1E_1 se coupent au point P de l'intersection. Supposons qu'un mobile se déplace le long de la directrice C en décrivant l'arc EDF pendant qu'un autre mobile décrit sur la directrice C_1 l'arc $E_1D_1F_1$; si en même temps un troisième mobile décrit l'intersection, il décrira un arc partant du point P pour aboutir au point Q en passant par le point M. Supposons maintenant que pendant que le premier mobile décrit l'arc EDF, le second mobile décrive l'arc $F_1D_1E_1$; le troisième mobile décrira un arc de l'intersection partant du point R pour aboutir au point T en passant encore par le point M. Il y a donc bien deux branches de l'intersection passant par le point M. Chaque projection de l'intersection présentera un point double qui sera la projection correspondante du point M.

Comme les plans tangents aux deux cônes suivant les génératrices qui donnent le point double sont confondus, la construction de la tangente à l'intersection en l'un quelconque de ses points ne réussit pas.

On peut construire les tangentes aux deux arcs de l'intersection qui passent par un point double à l'aide du tracé d'une courbe dite courbe d'erreur. Supposons les directrices des deux cônes dans un même plan P ; on peut toujours réaliser ce cas en construisant les courbes sections des deux cônes par le plan P et prenant ces deux courbes pour directrices. Soit AB la trace du plan tangent commun aux deux cônes sur le plan P_1. Déterminons les traces sur ce plan de tangentes à la courbe d'intersection en un certain nombre de points situés sur l'un des arcs de l'intersection de part et d'autre du point double et voisins de ce point. En les joignant par un trait continu, nous obtiendrons un arc de courbe G lieu des traces sur le plan P des tangentes à l'arc d'intersection considéré dans le voisinage du point double; comme d'autre part la tangente cherchée est dans le plan tangent commun, sa trace sur le plan P est un point de la droite AB : on prendra donc le point d'intersection de la courbe G et de la droite AB : la tangente qu'on veut construire sera la droite qui joint ce point au point double. On opérera de même pour l'autre arc de l'intersection passant par le point double.

Remarquons que pour construire les traces sur le plan P des tangentes aux points voisins du point double, il n'est pas nécessaire de construire ces points ; il suffit de tracer les tangentes aux deux directrices aux points où elles seraient coupées par les deux génératrices déterminant le point de l'intersection des deux cônes sur lequel on opère et de prendre le point d'intersection de ces deux tangentes.

Exemple. — *Les directrices des deux cônes sont deux courbes C et C_1 données dans le plan horizontal, les projections horizontales des sommets des deux cônes sont les points s et s_1, σ est le point d'intersection de la droite qui joint les sommets et du plan horizontal* (*fig.* 186).

Nous ne représentons que la projection horizontale. Soit σab la trace horizontale du plan tangent commun, elle est tangente aux deux directrices aux points d et d_1. Les deux génératrices sd, s_1d_1 se coupent au point double m. Pour construire l'intersection des deux cônes on emploie, suivant la méthode générale, des plans auxiliaires passant par la droite SS_1 ; leurs traces sur le plan horizontal passent par le point σ. Choisissons les traces $\sigma efef_1$, $\sigma_1ghg_1h_1$, de deux plans auxiliaires très voisins du plan tangent commun. On obtient un premier arc de l'intersection passant par le point m en combinant les

génératrices suivantes : *sh* et s_1g_1, *sf* et s_1e_1, *se* et s_1f_1, *sg* et s_1h_1. Les tangentes aux directrices aux points qui se correspondent deux à deux se coupent aux points α, β, γ, δ, qui déterminent une première

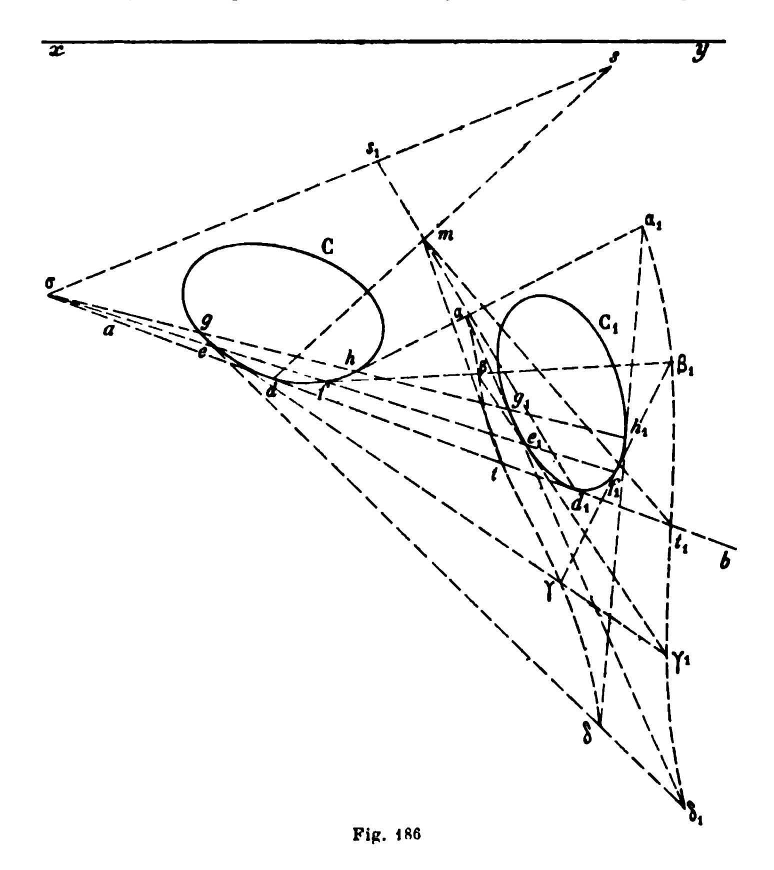


Fig. 186

courbe d'erreur coupant la droite *ab* au point *t*. La tangente correspondante au point double est la droite *tm*. On obtient le second arc de l'intersection en combinant les génératrices suivantes : *sh* et s_1h_1, *sf* et s_1f_1, *se* et s_1e_1, *sg* et s_1g_1. Les tangentes aux directrices aux points correspondants nous donnent par leurs intersections la seconde courbe d'erreur $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ qui coupe la droite *ab* au point t_1. La seconde tangente cherchée est la droite mt_1.

158. Point double apparent. — Une projection de l'intersection de deux cônes peut présenter un point double qui n'est pas la projection

d'un point double de l'intersection. Il en est ainsi quand deux points A et B de la courbe I d'intersection des deux cônes sont sur une même verticale AB (*fig.* 187).

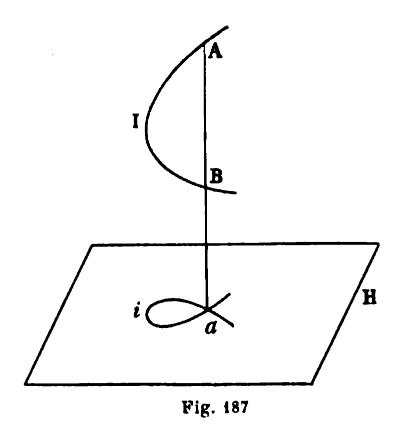


Fig. 187

Les deux points A et B se projettent sur le plan horizontal H en un point *a* où se croisent deux arcs de la projection *i* de l'intersection. Il en sera de même en projection verticale si deux points de l'intersection sont sur une même ligne de bout. Ces points doubles sont appelés *points doubles apparents.*

On ne peut pas en général déterminer les points doubles apparents, mais on peut dans certains cas construire une droite dans chaque plan de projection qui passe par ces points doubles.

Supposons qu'il s'agisse de cônes ayant pour directrices des coniques. Nous allons montrer que dans un tel cône, *le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est un plan.*

En effet, soient S le sommet d'un cône ayant pour directrice la

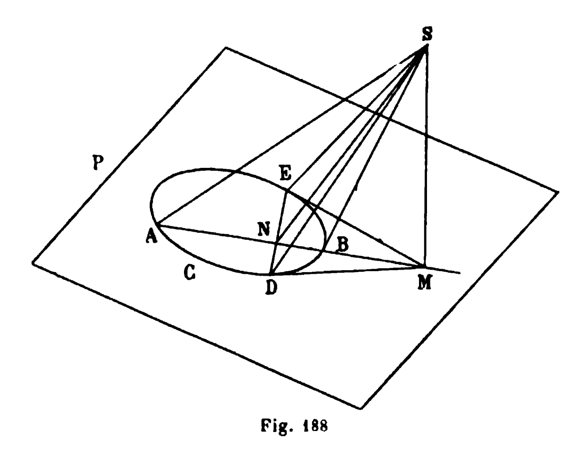


Fig. 188

conique C située dans le plan P (*fig.* 188), et SM la parallèle à la direction donnée passant par le point S et coupant le plan P au point M. Menons par la droite SM un plan quelconque qui coupe le

cône suivant les génératrices SA, SB. Dans le plan SABM si on coupe les génératrices SA et SB par des droites parallèles à la droite SM, le lieu des milieux de ces cordes est une droite SN conjuguée harmonique de la droite SM par rapport aux deux droites SA, SB, puisque toute parallèle à un rayon d'un faisceau harmonique est partagée par le rayon conjugué et les deux autres rayons en deux parties égales. Par suite les quatre points A, N, B, M forment une division harmonique et le point N décrit la polaire DE du point M par rapport à la conique C lorsque le plan SABM tourne autour de la droite SM. Le lieu des milieux de toutes les cordes du cône parallèles à la droite SM est donc le plan déterminé par cette polaire et par le point S. Si la direction SM est verticale, les plans tangents au cône SMD, SME sont verticaux, et les génératrices SD, SE sont les génératrices de contour apparent horizontal du cône. Le plan qu'elles déterminent est le lieu des milieux des cordes verticales.

De même le plan des génératrices de contour apparent vertical est le lieu des milieux des cordes parallèles à une ligne de bout.

Cela posé, s'il existe une corde verticale commune aux deux cônes dont on cherche l'intersection, son milieu sera à la fois dans les deux plans des contours apparents horizontaux des deux cônes; il sera donc sur la droite d'intersection de ces deux plans. Il en résulte que:

1° *Si on construit la droite d'intersection des plans des contours apparents horizontaux des deux cônes, sa projection horizontale passe par les points doubles apparents de la projection horizontale de leur intersection.*

2° *Si on construit la droite d'intersection des plans des contours apparents verticaux des deux cônes, sa projection verticale passe par les points doubles apparents de la projection verticale de leur intersection.*

Remarque. — Si le plan projetant la ligne des points doubles coupe les deux surfaces suivant des lignes simples, on peut déterminer les points qui se projettent aux points doubles apparents: ce sont les points communs aux deux lignes d'intersection des deux cônes et du plan projetant la ligne des points doubles.

159. Branches infinies. — Un point de l'intersection de deux cônes étant le point d'intersection d'une génératrice de l'un des cônes et d'une génératrice de l'autre, l'intersection aura un point à l'infini

lorsque l'un des cônes aura une génératrice parallèle à une génératrice de l'autre.

Pour trouver ces génératrices on opère de la manière suivante.

Soient S et S_1 les deux cônes. On construit un cône T ayant pour sommet le sommet de l'un des deux cônes donnés, le point S par exemple, et pour génératrices des parallèles aux génératrices du cône S_1. Les génératrices parallèles des cônes S et S_1 seront parallèles aux génératrices communes aux deux cônes S et T. Pour déterminer les génératrices communes aux deux cônes S et T, on peut les couper par un plan P et joindre par des droites le sommet commun aux points d'intersection des sections des deux cônes par le plan P. Quand les deux cônes sont de révolution, on peut employer une sphère comme nous l'avons fait antérieurement (123).

Ayant les génératrices parallèles des deux cônes S et S_1, on obtiendra l'*asymptote* correspondante en prenant la droite d'intersection des plans tangents aux deux cônes suivant ces deux génératrices, puisque l'asymptote est la position limite de la tangente à l'intersection quand le point de contact s'éloigne à l'infini.

Il peut arriver que les deux plans tangents soient parallèles ; dans ce cas il n'y a pas d'asymptote et la branche infinie de courbe est dite *parabolique*.

Application — *Un cône de révolution a pour base dans le plan horizontal le cercle de diamètre ab et pour sommet le point* (s, s') (*fig.* 189). *Un second cône de révolution a pour axe la droite* $(s_1\alpha, s_1'\alpha')$ *située dans le plan de front ab et pour sommet le point* (s_1, s_1'). *L'angle au sommet de ce cône est égal à l'angle* $l's_1'm'$. *Construire les asymptotes des projections de l'intersection de ces deux cônes.*

Nous allons d'abord déterminer les génératrices parallèles des deux cônes. Si nous transportons le cône S_1 parallèlement à lui-même au point S, le contour apparent vertical du cône transporté se composera des génératrices situées dans le plan de front *ab* dont les projections verticales $s'd'$, $s'e'$ sont parallèles aux droites $s_1'm'$, $s_1'l'$. Nous construisons les génératrices communes au cône S et au cône transporté en les coupant par une sphère de centre S et de rayon $s'e'$. Nous obtenons les génératrices $(si, s'i')$, $(sj, s'j')$ (123). Prenons par exemple la génératrice SI. Les projections s_1n, $s_1'n'$ de la génératrice du cône S_1 parallèle à la génératrice SI du cône S sont parallèles

respectivement aux droites *si*, *s'i'*. L'intersection des deux cônes aura une branche infinie dans la direction de la génératrice SI. L'asymp-

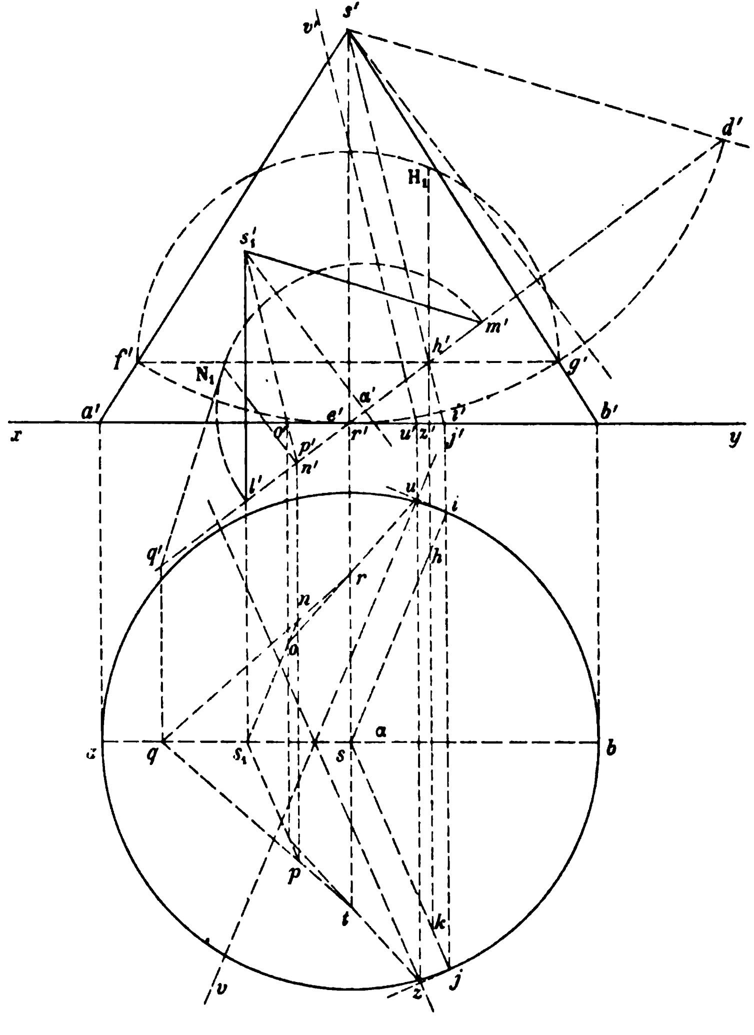


Fig. 189

tote correspondante est l'intersection des plans tangents aux deux cônes suivant les génératrices SI, S_1N. Le plan tangent au cône S est déterminé par la génératrice SI et la tangente *iu* à la circonfé-

rence ab; la droite iu est d'ailleurs la trace horizontale de ce plan. Nous allons construire la trace horizontale du plan tangent au cône S_1 suivant la génératrice S_1N. Il contient d'abord cette génératrice dont la trace horizontale est le point o. Prenons comme plan de la directrice du cône le plan de bout $sr'd'$ perpendiculaire à son axe; si nous rabattons ce plan sur le plan de front ab, la directrice se rabat suivant une circonférence ayant $l'm'$ pour diamètre, et la tangente à la directrice au point (n, n') de la génératrice S_1N se rabat suivant la droite $q'N_1$: elle a par suite pour projections les droites qn, $q'n'$. La trace horizontale de cette tangente est le point r; la trace horizontale du plan tangent au cône S_1 est donc la droite or qui coupe la droite iu au point u, trace horizontale de l'asymptote. Enfin l'asymptote étant parallèle à la droite $(si, s'i')$ est la droite $(uv, u'v')$.

Le génératrice SJ du cône S a pour génératrice parallèle sur le cône S_1 la génératrice $(s_1p, s_1'p')$. On en déduit, en opérant comme pour la génératrice SI, l'asymptote dont la trace horizontale est le point (z, z') et dont les projections sont parallèles aux droites sj et $s'j'$. Les projections verticales des deux asymptotes sont confondues.

II. — Intersection d'un cône et d'un cylindre.

160. Un cylindre peut être envisagé comme un cône dont le sommet s'est éloigné à l'infini dans la direction des génératrices. La droite qui passait par les sommets des deux cônes (155) devient la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône. Les plans auxiliaires sont les plans qui passent par cette droite et les points de l'intersection se déterminent comme dans le cas de deux cônes.

Application. — *Construire l'intersection d'un cône et d'un cylindre de révolution ayant une génératrice commune et même plan tangent le long de cette génératrice.*

Soit un cône de révolution ayant pour sommet le point (s, s') et pour directrice dans le plan horizontal le cercle de diamètre ab (*fig.* 190). Supposons qu'on ait choisi comme plan vertical de projection un plan parallèle au plan vertical qui passe par la génératrice commune $(sb, s'b')$. Le cylindre a pour base dans le plan de bout $P\alpha P'$ perpendiculaire à sa génératrice $(sb, s'b')$ un cercle de diamètre $c'd'$,

de sorte que le contour apparent vertical du cylindre se compose des deux parallèles $b's'$, $d'e'$ et son contour apparent horizontal de deux parallèles à la droite ab, situées de part et d'autre de cette droite à une distance égale à $i'd'$, rayon de la circonférence $c'd'$. Il résulte des propriétés des surfaces du second ordre que, le cône et le cylindre ayant une génératrice commune et même plan tangent le long de cette génératrice, leur intersection, indépendamment de la génératrice, est une courbe plane (*). Nous allons montrer comment la méthode générale permet de construire autant de points qu'on veut de la section, puis nous ferons voir qu'on peut vérifier sans difficulté que les deux surfaces ont une courbe plane commune.

La parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône est la droite $(sb, s'b')$; elle coupe le plan de base du cône au point (b, b') et celui du cylindre au point (c, c'). L'intersection des plans des deux bases est la trace horizontale αP du plan $P\alpha P'$. Pour avoir un point quelconque de l'intersection, choisissons arbitrairement le point h sur la droite αP et traçons les droites hb, hc. Le plan auxiliaire correspondant au point h coupe le cône suivant la génératrice qui a sg pour projection horizontale. Il faut trouver le point d'intersection de la droite ch du plan $P\alpha P'$ avec la directrice du cylindre. Rabattons le plan $P\alpha P'$ sur le plan de front ab, le point C se rabat au point c', et le point (i, i') au point I_1, la longueur $i'I_1$ étant égale à la longueur si. La base du cylindre se rabat suivant une circonférence dont le diamètre est $c'd'$. La droite rabattue $c'I_1$ coupe cette circonférence au point K_1 qui se relève au point (k, k'). La génératrice du cylindre est la droite $(jk, j'k')$ qui coupe la génératrice SG du cône au point (m, m') de la section. En faisant varier le plan auxiliaire et en joignant les points obtenus dans l'ordre convenable on aura les projections de l'intersection. En construisant, outre les points sur les contours apparents, des points voisins de ab, tels que le point m, et les tangentes en ces points, intersections des plans tangents correspondants aux deux surfaces, on aura la forme de la courbe dans le voisinage du point où elle coupe ab. La recherche de ce dernier point lui-même échappe à notre méthode, puisque la génératrice $(sb, s'b')$ du cône est confondue avec une génératrice du cylindre.

Nous allons montrer qu'il y a une ellipse commune aux deux sur-

(*) Voir la note II à la fin du volume.

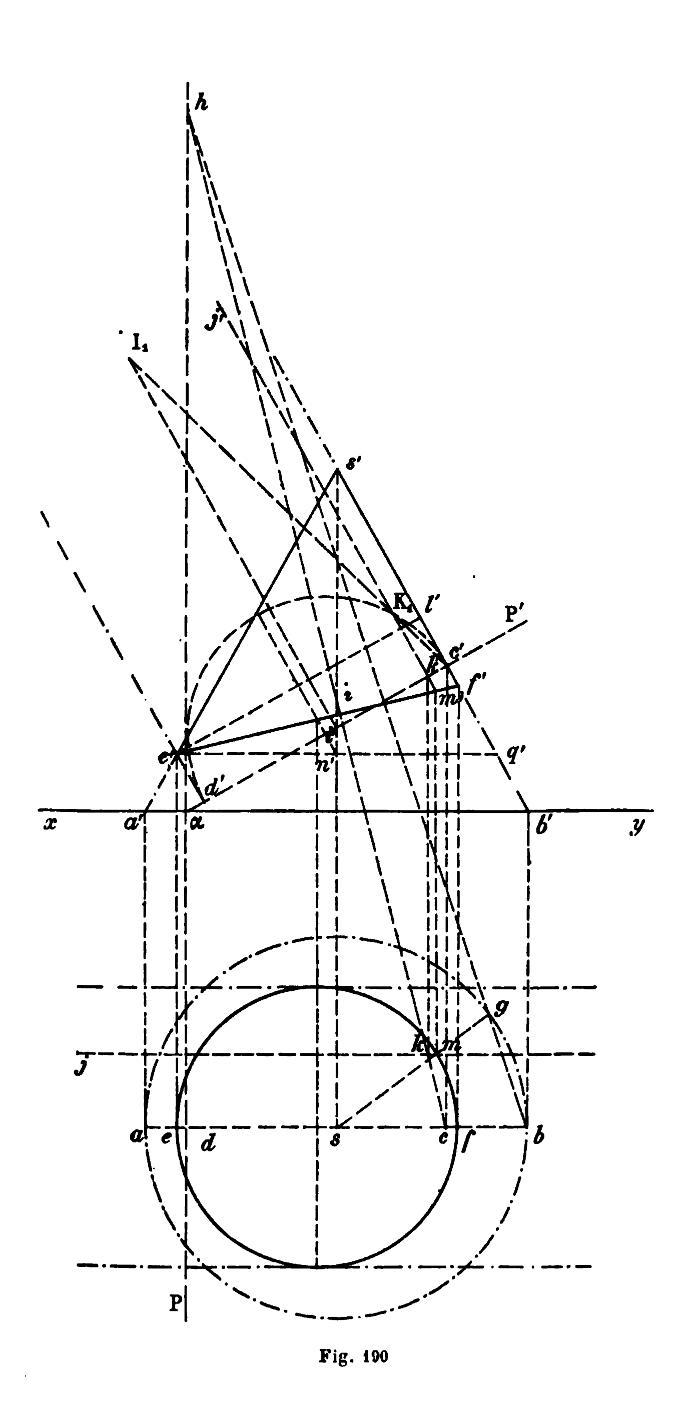


Fig. 190

faces. Le point (e, e') intersection de la génératrice $(sa, s'a')$ du cône et de la génératrice $(de, d'e')$ du cylindre, génératrices situées dans le plan de front ab, est un point de l'intersection du cône et du cylindre. Menons la droite $e'n'q'$ perpendiculaire à l'axe du cône, la droite $e'l'$ perpendiculaire à la génératrice $s'b'$, et prenons le point f' milieu de la droite $l'q'$. On démontre dans les cours de géométrie que le plan perpendiculaire au plan vertical qui a pour trace verticale la droite $e'f'$ coupe le cône suivant une ellipse qui a pour axe focal $e'f'$ et dont la distance des foyers est égale à $f'q'$, et le cylindre suivant une ellipse qui a pour axe focal $e'f'$ et dont la distance des foyers est égale à $f'l'$. Les deux longueurs $f'q'$, $f'l'$ étant égales, ces deux ellipses sont identiques. La courbe commune aux deux surfaces se projette horizontalement suivant l'ellipse emf qu'on peut construire comme projection de la section du cône par le plan de bout $e'f'$ (126), et verticalement suivant la droite $e'f'$.

Dans la mise à l'encre nous avons représenté la partie solide du cône intérieure au cylindre et comprise entre le sommet du cône et le plan de la courbe commune au cône et au cylindre.

161. Branches infinies. — Nous nous bornerons au cas où le cylindre est de révolution; aucune de ses génératrices n'est rejetée à

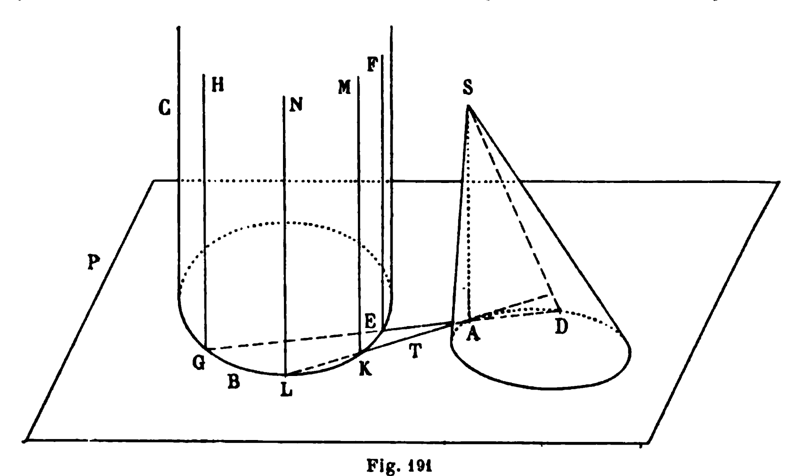


Fig. 191

l'infini, de sorte que l'intersection ne peut présenter de point à l'infini que si l'une des génératrices du cône est parallèle aux génératrices du cylindre. Supposons qu'il en soit ainsi et que la génératrice SA du

cône S soit parallèle aux génératrices du cylindre C (*fig.* 191). Soient P le plan de la directrice B du cylindre, A le point où la génératrice SA du cône coupe le plan P, AT la trace sur le plan P du plan tangent au cône suivant la génératrice SA. Les plans auxiliaires passent par la droite SA. Un plan auxiliaire quelconque SAD coupe le cône suivant les génératrices SA et SD et le cylindre suivant les génératrices EF, GH. La génératrice SA coupe les génératrices du cylindre à l'infini, mais la génératrice SD coupe les génératrices EF et GH du cylindre en deux points à distance finie. Si la droite AT ne coupe pas la courbe C, l'intersection se compose de points tous rejetés à l'infini d'une part, et d'autre part d'une courbe dont tous les points sont à distance finie. Si au contraire la droite AT coupe la courbe C, par exemple en deux points K et L, quand on prend pour plan auxiliaire le plan tangent au cône suivant la génératrice SA, la génératrice SD vient se confondre avec SA et l'intersection présente deux points à l'infini dans la direction de la droite SA, c'est-à-dire des génératrices du cylindre. Les asymptotes sont les intersections du plan tangent SAT au cône avec les plans tangents au cylindre suivant les génératrices KM, LN. Ce sont ces génératrices elles-mêmes.

III. — Intersection de deux cylindres.

162. Deux cylindres peuvent être considérés comme des cônes dont les sommets sont rejetés à l'infini, chacun dans une direction donnée ; il en résulte que les plans auxiliaires seront parallèles aux génératrices des deux cylindres et par suite parallèles entre eux. Par un point de l'espace on mène des parallèles aux génératrices des deux cylindres, elles déterminent un plan auquel les plans auxiliaires sont parallèles. Supposons les directrices du cylindre planes ; les plans auxiliaires couperont le plan de chaque directrice suivant une série de parallèles ; d'ailleurs, un plan auxiliaire étant choisi, les constructions qui donnent le point correspondant de l'intersection s'achèveront comme pour deux cônes.

Remarque. — Si les deux cylindres ont leurs génératrices parallèles, leur intersection se compose de génératrices ; pour les obtenir on coupe les deux cylindres par un plan, les génératrices communes

passent par les points d'intersection des deux courbes suivant lesquelles les deux cylindres sont coupés par ce plan.

Si les génératrices des deux cylindres ne sont pas parallèles, leur intersection ne pourra présenter de point à l'infini que si l'un au moins des deux cylindres a des génératrices rejetées à l'infini. Nous ne nous occuperons pas de tels cylindres dans ce cours.

Application. — *Construire l'intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe est vertical et d'un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal.*

Le premier cylindre a pour base dans le plan horizontal de projection la circonférence de diamètre ab (*fig.* 192). Le second a pour directrice, dans le plan vertical dont αP est la trace horizontale, une circonférence qui est rabattue autour de la trace αP suivant la circonférence C_1. Les plans auxiliaires sont des plans verticaux dont les traces horizontales sont perpendiculaires à la droite αP. Ils coupent le plan de la directrice C_1 suivant des droites dont les rabattements sont perpendiculaires à la droite αP, et le plan de la directrice du premier cylindre, c'est-à-dire le plan horizontal, suivant leurs traces horizontales qui sont aussi perpendiculaires à la droite αP. Les deux tangentes à la circonférence C_1 perpendiculaires à la droite αP sont les rabattements des traces sur le plan de la directrice C_1 des plans auxiliaires limites pour le cylindre correspondant; il y a donc pénétration de ce cylindre dans l'autre.

Le plan limite E_1gh coupe le cylindre vertical suivant les génératrices g, h, et l'autre cylindre suivant une génératrice dont la projection verticale, parallèle à la ligne de terre, est distante de cette droite d'une longueur égale à la distance du point E_1 à la droite αP. Cette génératrice coupe les deux premières aux points (g, g'), (h, h'), et en ces points l'intersection est tangente aux génératrices du cylindre vertical. Le plan auxiliaire K_1L_1 nous donne les points situés sur la génératrice a du cylindre vertical, ainsi que deux autres points projetés horizontalement au point o. Le plan auxiliaire I_1J_1 donne les points situés sur le contour apparent vertical du cylindre dont l'axe est horizontal. Enfin les plans auxiliaires M_1N_1, G_1st donnent les points sur la génératrice b de contour apparent vertical et les points s', t'. En joignant par un trait continu et dans un ordre convenable les points de l'intersection que l'on vient de construire,

on obtient les deux arcs de courbes distincts $g'a'p'r's'r''p''a''g'$, $h'o'q'b't'b''q''o''h'$.

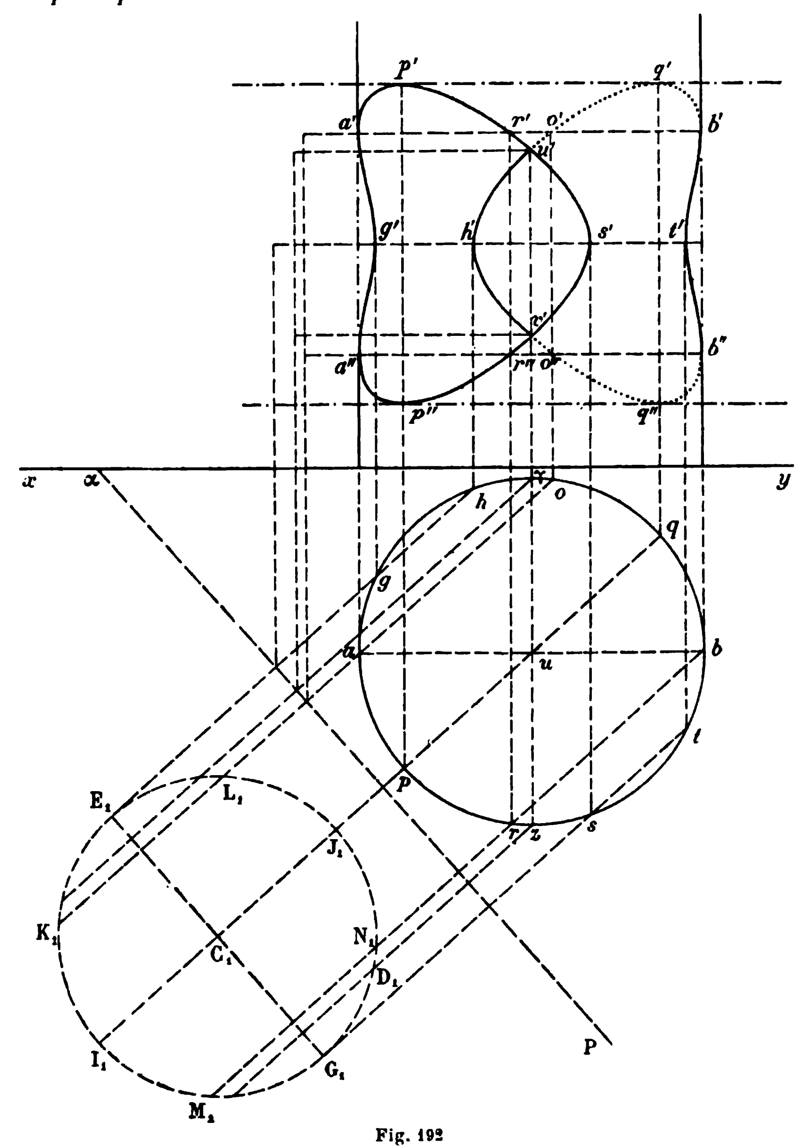


Fig. 192

Il y a deux points doubles apparents. Ils sont sur la verticale u, intersection des plans des contours apparents verticaux des deux

cylindres. Dans le cas actuel on peut déterminer les points doubles eux-mêmes. Il suffit de prendre le plan auxiliaire zD_1 passant par la génératrice z du cylindre vertical. On peut d'ailleurs vérifier que la génératrice γ donne les mêmes points u' et v'.

La projection horizontale de l'intersection est la circonférence ab.

Proposons-nous de représenter : *le cylindre vertical entaillé par l'autre cylindre qu'on suppose enlevé.*

Les portions $a'a''$, $b'b''$, du contour apparent du cylindre vertical sont à l'intérieur de l'autre cylindre, par suite, elles sont enlevées et doivent être mises à l'encre en trait mixte. L'arc d'intersection $a'p'r's'r''p''a''$ est sur le cylindre vertical seul conservé en avant du plan du contour apparent vertical, il est donc vu. L'arc $a'g'a''$ serait caché par le cylindre vertical, mais la partie de ce cylindre qui le cacherait est supprimée par la pénétration du second cylindre, donc l'arc $a'g'a''$ est aussi vu. Pour la seconde courbe, c'est l'arc $b't'b''$ qui est vu tandis que le reste de la courbe est caché par le cylindre vertical, mais l'arc $u'h'v'$ est cependant vu car il était caché par une portion du cylindre vertical qui est supprimée. Enfin le cylindre dont l'axe est horizontal est supposé complètement enlevé.

NOTE I

ROTATIONS AUTOUR D'AXES PARALLÈLES AUX PLANS DE PROJECTIONS

163. Rotation d'un point autour d'un axe vertical. — Soient un axe vertical o et un point (a, a') (*fig.* 193). On suppose que le point tourne autour de l'axe d'un angle donné et dans un sens donné. On se propose de construire les projections du point dans sa nouvelle position.

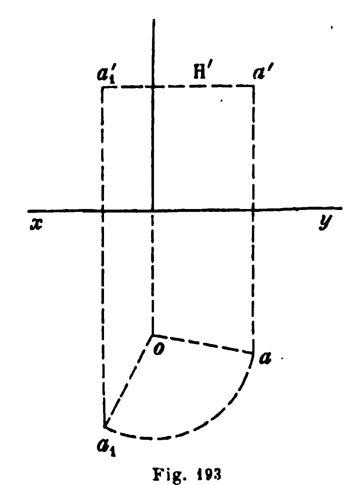


Fig. 193

Dans l'espace le point décrit une circonférence située dans le plan horizontal H' perpendiculaire à l'axe ; cette circonférence se projette horizontalement suivant une circonférence ayant pour centre le point o et un rayon égal à la longueur oa. La projection horizontale du point (a, a') se meut sur cette circonférence dans le sens donné et vient en un point a_1 tel que l'angle aoa_1 soit égal à l'angle donné. Quant à la projection verticale du point (a, a'), elle reste sur la droite H' et elle vient sur la ligne de rappel du point a_1. Après la rotation les deux projections du point sont a_1 et a'_1.

164. Rotation d'une droite autour d'un axe vertical. — Soient un axe vertical o et une droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 194). On suppose que la

droite tourne autour de l'axe d'un angle donné et dans un sens donné. On se propose de construire les projections de la droite dans sa nouvelle position.

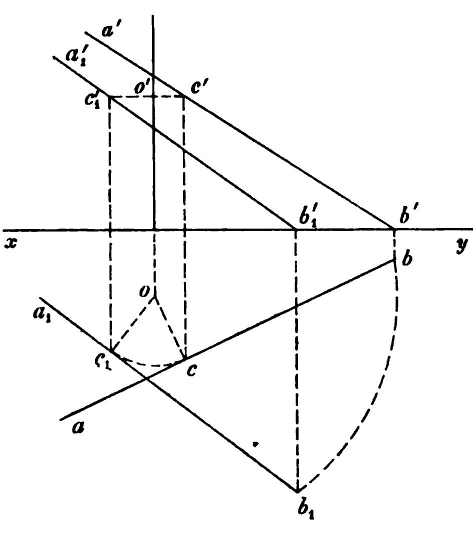


Fig. 194

Il suffit d'effectuer la rotation pour deux points de la droite.

Nous prendrons d'abord le pied (c, c') de la perpendiculaire commune à la droite et à l'axe; il vient occuper la position (c_1, c'_1). Comme pendant le mouvement la droite $(oc, o'c')$ reste perpendiculaire commune à l'axe et à la droite, la projection horizontale de la droite reste tangente à la circonférence oc puisqu'elle est constamment perpendiculaire au rayon. Comme second point on peut prendre par exemple la trace horizontale (b, b') de la droite. Après la rotation ce point prendra la position (b_1, b'_1) et la droite aura pour projections les droites a_1b_1, $a'_1b'_1$, déterminées par les points c_1, b_1; c'_1, b'_1. On voit sans difficulté que les longueurs cb, c_1b_1, sont égales.

165. Rotation d'un plan autour d'un axe vertical. — Il suffit d'effectuer la rotation pour trois points du plan, ou pour une droite et un point. On prend de préférence la trace horizontale du plan et le point où le plan coupe l'axe, point qui reste fixe. Soient l'axe vertical o et le plan $P\alpha P'$ (*fig.* 195). Déterminons d'abord le point (o, o') d'intersection du plan et de l'axe ; puis faisons tourner la trace αP d'un angle égal à l'angle donné autour du pied de l'axe, elle viendra prendre la position α_1P_1.

Après la rotation le plan est déterminé par sa trace horizontale α_1P_1 et par le point (o, o'). Sa trace verticale est la droite $\alpha_1P'_1$.

Remarque. — Les constructions relatives aux rotations autour d'un axe de bout sont analogues aux précédentes.

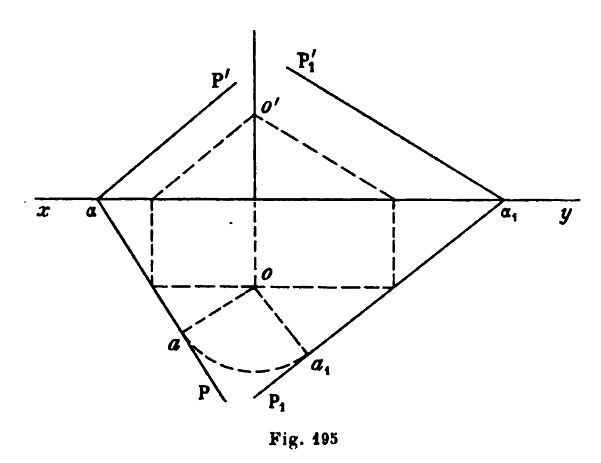


Fig. 195

166. Applications. — Comme les changements de plans de projections, les rotations permettent de rendre certains éléments parallèles ou perpendiculaires à un plan de projection ; mais quand on emploie cette méthode les plans de projections restent fixes et c'est la figure que l'on étudie qui tourne autour d'axes convenablement choisis.

Par exemple si l'on veut rendre une droite parallèle au plan vertical, on prend un axe vertical et l'on fait tourner la droite autour de cet axe jusqu'à ce que sa projection horizontale soit parallèle à la ligne de terre.

Si l'on veut rendre un plan perpendiculaire au plan horizontal, on le fait tourner autour d'un axe de bout jusqu'à ce que sa trace verticale soit perpendiculaire à la ligne de terre.

Remarque. — Si l'on veut effectuer une rotation autour d'un axe parallèle à un plan de projection mais oblique à l'autre, on ramène ce cas au précédent à l'aide d'un changement de plan préalable.

Par exemple, si l'axe de rotation est une droite de front on fera d'abord un changement de plan horizontal en prenant comme nouveau plan horizontal un plan perpendiculaire à cet axe. La nouvelle ligne de terre doit être perpendiculaire à la projection verticale de l'axe.

NOTE II

SUR LES INTERSECTIONS DE CONES ET DE CYLINDRES DE RÉVOLUTION DANS DES CAS PARTICULIERS

---

167. Nous nous proposons de démontrer quelques théorèmes relatifs à l'intersection de deux cônes en nous bornant au cas où ces cônes sont de révolution.

Théorème I. — *Si deux cônes de révolution sont circonscrits à une même sphère, ils ont deux courbes planes communes.*

Soient deux cônes de révolution ayant pour sommets les points S et S_1 (*fig.* 196) et circonscrits à une même sphère O. Représentons la section de la sphère et des deux cônes par le plan passant par les sommets S et S_1 et par le centre de la sphère. Ce plan coupe le cône S suivant les génératrices SC, SD, le cône S_1 suivant les génératrices S_1A, S_1D, et la sphère suivant un grand cercle tangent à ces génératrices aux points E, F, G, H. Traçons la diagonale AC du quadrilatère ABCD. Le plan passant par la droite AC et perpendiculaire au plan $SACS_1$ coupe le cône S suivant une conique ayant pour axe focal AC et dont la distance des deux foyers est égale à SC — SA (*). Il coupe le cône S_1 suivant une conique ayant même axe focal AC et dont la distance des foyers est égale à $S_1A - S_1C$. Si nous démontrons que ces deux distances focales sont égales, il en résultera que les

(*) Voir dans un cours de géométrie la démonstration du théorème sur les sections planes du cône de révolution.

deux coniques coïncident; or on a, à cause des propriétés des tangentes menées par un point à une circonférence,

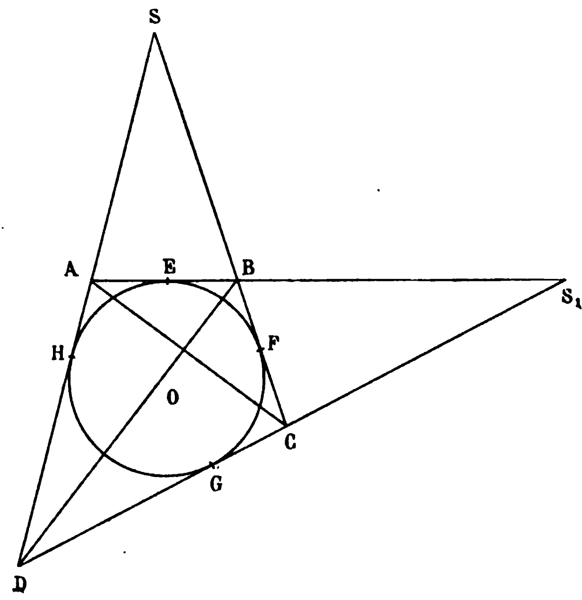


Fig. 196

$$FC = GC, \qquad SF = SH, \qquad S_1E = S_1G, \qquad AH = AE.$$

On en déduit

$$FC + SF - (SH - AH) = AE + S_1E - (S_1G - GC),$$

ou

$$SC - SA = S_1A - S_1C.$$

Les deux cônes ont donc une première conique commune. On verrait de même qu'ils en ont une seconde ayant pour axe focal la diagonale BD et située dans le plan perpendiculaire au plan SDS_1 mené par la seconde diagonale BD du quadrilatère ABCD.

168. Théorème II. — *Quand deux cônes de révolution ont une courbe plane commune, ils ont une autre courbe plane commune.*

Supposons qu'un premier cône de révolution S soit coupé par un plan P suivant une conique L. Soient SA, SC les génératrices d'intersection du cône et du plan passant par son axe et perpendiculaire au plan P. Soit AC l'axe focal de la conique L (*fig.* 196). Un second cône

de révolution S_1 passe par la conique L ; comme cette conique a pour axe focal la droite AC, le plan passant par l'axe du cône S_1 et perpendiculaire au plan P doit contenir la droite AC, par suite il est confondu avec le plan SAC. Soient S_1A, S_1D les génératrices d'intersection de ce plan et du cône S_1. Les droites SA, SC, S_1A, S_1D se coupent aux points A, B, C, D. Nous allons montrer que les deux triangles SAB, S_1BC ont même cercle exinscrit respectivement dans les angles S et S_1. En effet, soient F, E, H les points de contact du cercle exinscrit au triangle SAB dans l'angle S. Comme la conique L est commune aux deux cônes, les différences $SC - SA$, $S_1A - S_1C$ sont égales toutes deux à la distance des foyers de la conique L. On a donc

$$SC - SA = S_1A - S_1C,$$

ou

$$SF + FC - SH + AH = S_1E + AE - S_1C\ ;$$

donc, comme $SF = SH$ et $AE = AH$, on a

$$S_1E = S_1C + FC;$$

or

$$S_1E = S_1B + BE = S_1B + BF.$$

On a donc, en ajoutant et divisant par 2

$$S_1E = \frac{S_1B + BC + S_1C}{2}.$$

Il en résulte que le cercle exinscrit au triangle S_1BC dans l'angle S_1 est tangent à la droite S_1B au point E et à la droite BC au point F; il est donc confondu avec le précédent, et par suite il est tangent aux quatre côtés du quadrilatère ABCD. Si maintenant on considère la sphère dont le cercle EFGH est un grand cercle, les deux cônes seront circonscrits à cette sphère; donc ils ont deux courbes planes communes : la conique L, et une seconde conique dont l'axe focal est la droite BD et dont le plan est perpendiculaire au plan SDS_1.

Remarque. — Les théorèmes précédents s'étendent aux cas où les cônes sont remplacés par des cylindres. Nous les avons établis en supposant la figure disposée d'une certaine façon. La démonstration est analogue pour les différents cas qui peuvent se présenter. Les coniques que nous avons envisagées peuvent être, suivant les cas, des ellipses, des hyperboles ou des paraboles.

169. Théorème III. — *Deux cônes de révolution qui ont une géné-*

ratrice commune et même plan tangent suivant cette génératrice ont une courbe plane commune.

Soient deux cônes de révolution ayant pour sommets les points S et S_1. La génératrice commune sera la droite SS_1 (*fig.* 197). Comme les deux cônes ont même plan tangent suivant cette génératrice, leurs axes SO, S_1O sont dans le plan perpendiculaire au plan tangent commun mené par la droite SS_1. Supposons que ce plan coupe les deux cônes suivant les génératrices SA, S_1A; le point A commun à ces deux génératrices appartient aux deux cônes. Menons les droites AA, AA″, perpendiculaires aux axes des deux cônes. Nous allons montrer qu'il existe sur la droite SS_1 un point B situé entre le point A′ et le point A″, tel que l'on ait

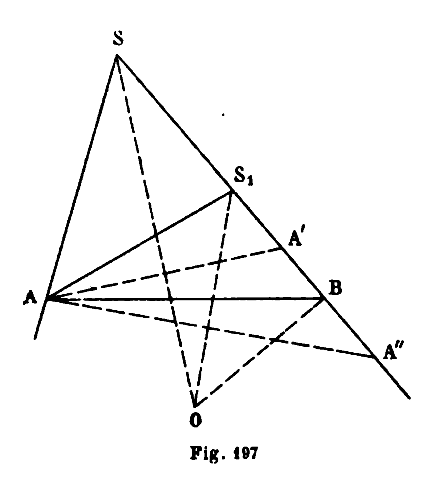


Fig. 197

$$SB - SA = S_1A - S_1B.$$

En effet, cette égalité peut s'écrire

$$SB - SA = S_1A - (SB - SS_1).$$

On en tire

$$SB = \frac{SA + SS_1 + S_1A}{2}.$$

Le point B est le point de contact avec le côté SS_1 du cercle exinscrit au triangle SAS_1 dans l'angle S. C'est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite SS_1. On vérifie d'ailleurs aisément que la longueur SB est bien comprise entre SA′ ou SA, et SA″ ou $SS_1 + S_1A$. Considérons maintenant les deux coniques sections des cônes S et S_1 par le plan perpendiculaire au plan SAS_1 mené par la droite AB ; elles ont même axe focal AB et les distances de leurs foyers sont égales, donc elles coïncident et les deux cônes ont bien une conique commune, outre la génératrice SS_1.

Nous avons rencontré antérieurement (160) une application de ce théorème dans le cas d'un cône et d'un cylindre de révolution.

170. Théorème IV. — *Deux cônes de révolution qui ont deux plans tangents communs ont deux courbes planes communes.*

Remarquons d'abord que si deux plans sont tangents à un cône de révolution, l'axe du cône est dans le plan bissecteur du dièdre formé par les deux plans. Cela résulte de ce que la distance d'un point choisi sur l'axe aux deux plans tangents est la même : un point quelconque de l'axe est donc dans le plan bissecteur du dièdre formé par les deux plans tangents. Soient S et S_1 les deux cônes de révolution qui ont deux plans tangents communs P et Q. D'après la remarque précédente, les axes des deux cônes sont dans le plan bissecteur R du dièdre formé par les deux plans P et Q. Prenons ce plan comme plan de la figure (*fig.* 198). Soient S et S_1 les sommets des deux cônes qui sont dans le plan R puisqu'ils sont sur l'intersection des deux plans P et Q. SA, SB sont les génératrices d'intersection du cône S et du plan R ; S_1B, S_1C, du cône S_1 et du plan R. Traçons la diagonale AC du quadrilatère ABCD. Le plan M passant par AC et perpendiculaire au plan de la figure coupe chacun des cônes suivant une conique ; nous allons montrer que ces deux coniques coïncident. D'abord elles ont même axe focal AC. Soit E le point d'intersection de la droite SS_1 avec le plan M. Le plan P étant tangent aux deux cônes est coupé par le plan M suivant une droite passant par le point E et qui est tangente à chaque conique section de l'un des cônes par le plan M. Ces deux coniques ont donc même axe focal et sont tangentes à une même droite; il est aisé de voir qu'elles ont mêmes foyers. En effet, d'après une propriété des coniques, ces foyers sont les points d'intersection de l'axe focal et des perpendiculaires à la tangente aux points où elle est coupée par la circonférence qui a l'axe focal pour diamètre ; ils sont donc les mêmes pour les deux coniques, qui par conséquent coïncident.

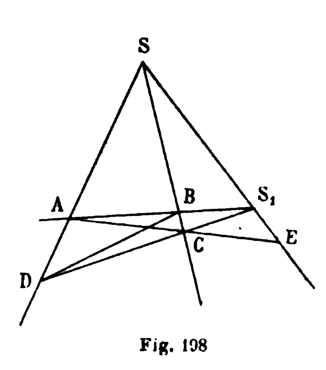


Fig. 198

Les deux cônes ont une seconde conique commune; elle a pour axe focal la diagonale BD du quadrilatère ABCD et son plan est perpendiculaire au plan R de la figure.

ERRATA

Page 8, ligne 16 : après *parallèles* ajouter *s'ils ne sont perpendiculaires à la droite xy*. Supprimer *mais*.
— 9, — 11 : lire *ces* au lieu de *ses*.
— 15, — 18 : — oa'_1 — oa_1.
— 57, — 14 : — 0,75 — 0,45.
— 65, — 19 : supprimer *comme étant perpendiculaires à une même direction.*
— 82, — 20 et 21 : lire N_1Q_1 et *nq* au lieu de N_1P_1 et *np*.
— 145, — 4 : lire *les deux tangentes aux courbes* G *et* G' au lieu de *ces deux tangentes*.
— 150, — 8 : supprimer *grand*.
— 171, — 26 : lire S'_1 au lieu de S_1.
— 173, — 18 : supprimer *supposons ses deux projections*, *etc.* jusqu'à *ligne de terre*.
Fig. 111, lire C' au lieu de *c'*.
Fig. 119, *k* est le second point d'intersection de la droite *sa* et de la directrice.
Fig. 142, lire *s* au lieu de S à la partie inférieure de la droite SH.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

PROJECTIONS SUR DEUX PLANS RECTANGULAIRES

DEUXIÈME PARTIE

MÉTHODE DES PROJECTIONS COTÉES

TROISIÈME PARTIE

REPRÉSENTATION DES POLYÈDRES ET DES SURFACES

COMPLÉMENTS

NOTE I

NOTE II

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet. Facdouel, dir.

